目　录

第八章　声　　音

§ 63. 声波

现在我们来研究可压缩流体的流动，并且从研究小振动开始；可压缩流体中的小幅度振动称为声波．在流体的每一点中，声波导致了交替出现的压缩和稀疏．

既然振动是微小的，速度 v 也就很小，因此欧拉方程中的一项 $(v\cdot\nabla)v$ 可以略去不计．由于同样的道理，流体中的密度和压力的相对变化也是小量，我们可以把变量 p 和 ρ 写成下面的形式：

$$p=p_0+p', \qquad \rho=\rho_0+\rho', \tag{63.1}$$

式中，ρ_0 和 p_0 是密度和压力不变的平衡值，ρ' 与 p' 是声波中密度和压力的改变量（$\rho'\ll\rho_0, p'\ll p_0$）．将(63.1)代入连续方程 $\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho v)=0$，并略去二阶小量（$\rho', p'$ 和 v 是一阶小量），它就变为

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot v=0. \tag{63.2}$$

在相同的近似程度上，欧拉方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v=-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

可化为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\nabla p'=0. \tag{63.3}$$

经线性化的运动方程组(63.2)和(63.3)适用于声波传播的条件是：与声速相比，声波中流体质点的速度必须是小量，即 $v\ll c$．这一条件，比方说，可以从 $\rho'\ll\rho_0$ 这一必要条件得出（参看下面的公式(63.12)）．

方程组(63.2)和(63.3)含有未知函数 v, p' 和 ρ'. 为了消去其中一个未知函数，我们注意到，正如理想流体中的任何其它运动形式一样，理想流体中的声波是绝热运动. 因此，压力的微小变化 p' 和密度的微小变化 ρ' 之间的关系为

$$p'=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \rho'. \tag{63.4}$$

按照这个方程，把 ρ' 代进(63.2)，就得到

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+\rho_0\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_0}\right)_s \nabla\cdot \boldsymbol{v}=0. \tag{63.5}$$

包含未知函数 $\boldsymbol{v}$ 和 p' 的两个方程(63.3)和(63.5)，完全地描述了声波的运动.

为了将所有的未知量用其中一个未知量来表示，方便的办法是引入速度势 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$. 由方程(63.3)我们可以得到

$$p'=-\rho\frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{63.6}$$

此式表示了 p' 与 ϕ 的关系(为简便起见，今后将省略去 p_0 和 ρ_0 中的下标). 于是，由(63.5)可得出速度势 ϕ 必须满足的方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-c^2\Delta\phi=0; \tag{63.7}$$

这里，我们引用了符号

$$c=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \tag{63.8}$$

形式象(63.7)的方程称为**波动方程**. 对(63.7)作用梯度算符，就会发现，速度 $\boldsymbol{v}$ 的三个分量满足同样形式的方程；而将(63.7)对时间微分，则可看出压力 p'(因而还有 ρ')也满足波动方程.

现在考虑这样的声波，其中所有的量只依赖于一个坐标(比方说，x)，也就是说，yz 平面内的流动是完全均匀的. 这样的波称为**平面波**. 波动方程(63.7)变为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0. \tag{63.9}$$

为解此方程，我们用新变量 $\xi=x-ct$，$\eta=x+ct$ 代换 x 和 t. 容易看出，用了这些变量，方程(63.9)变为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta\partial\xi}=0.$$

对 ξ 积分这个方程，得到 $\partial\phi/\partial\eta=F(\eta)$，其中 $F(\eta)$ 是 η 的任意函数. 再积分一次，便得 $\phi=f_1(\xi)+f_2(\eta)$，这里，f_1 和 f_2 为其自变量的任意函数. 因此，

$$\phi=f_1(x-ct)+f_2(x+ct). \tag{63.10}$$

平面波中的其它量(p', ρ', $\boldsymbol{v}$)的分布，也可以用同样形式的函数表示.

为明确起见，我们来讨论密度 $\rho'=f_1(x-ct)+f_2(x+ct)$. 若设 $f_2=0$，则有 $\rho'=f_1(x-ct)$. 这个解的意义是明显的：在任何 $x=$常数的平面内，密度随时间而变化，而在任何给定的时刻，密度因 x 的改变而不同；但是，对于满足 $x-ct=$常数，或 $x=$常数$+ct$ 的坐标 x 和时间 t，密度是相同的. 这就表明，如果在某一时刻 $t=0$，某点上的流体密度取某确定值，那么，经过时间 t 以后，密度的同一值就会在另一点上出现，而该点与原先那点沿 x 轴的距离为 ct. 声波中所有其它量也有同样的情况. 所以，这种流动图象是以速度 c 沿着 x 轴方向在介质中传播的，c 称为**声速**.

这样，$f_1(x-ct)$就表示沿 x 轴正方向传播的**平面行波**. 显然，$f_2(x+ct)$表示沿相反方向传播的波.

在平面波内，速度 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$ 的三个分量中，只有 $v_x=\partial\phi/\partial x$ 不为零. 因此，声波中的流体速度是沿着波传播的方向。由于这个原因，我们说流体中的声波是**纵波**.

在平面行波中，速度 $v_x=v$ 和压力 p' 以及密度 ρ' 之间，存在

着形式简单的关系. 设 $\phi=f(x-ct)$，可得 $v=\partial\phi/\partial x=f'(x-ct)$ 和 $p'=-\rho\partial\phi/\partial t=\rho cf'(x-ct)$. 对比这两个表达式，我们求得

$$v=\frac{p'}{\rho c}. \tag{63.11}$$

根据(63.4)式，用 $p'=c^2\rho'$ 代入上式，就得到速度和密度改变量之间的关系：

$$v=\frac{c\rho'}{\rho}. \tag{63.12}$$

我们再来说明声波中的速度和温度振动量之间的关系. 已知 $T'=(\partial T/\partial p)_s p'$，再应用熟知的热力学公式 $(\partial T/\partial p)_s=(T/c_p)\times(\partial V/\partial T)_p$ 和公式(63.11)，即得

$$T'=c\beta Tv/c_p \tag{63.13}$$

其中，$\beta=(1/V)(\partial V/\partial T)_p$是热膨胀系数.

公式(63.8)是以流体的绝热压缩系数来表示声速的，而绝热压缩系数与等温压缩系数的关系，可由下面的热力学公式给出：

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=\frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T. \tag{63.14}$$

现在来计算理想气体中的声速. 理想气体的状态方程是 $pV=p/\rho=RT/\mu$，其中，R 是气体常数，μ 是分子量. 我们得到声速的表达式为

$$c=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}, \tag{63.15}$$

式中 γ 表示比值 c_p/c_v①. 因为 γ 通常只是随温度略有改变，故可以认为气体的声速是和温度的平方根成正比. 当温度给定时，它和压力无关.

有一种很重要的情形即所谓**单色波**，其中，所有的量恰是时间

---

①需要指出：气体中的声速与分子的平均热速度为同一量级.

的周期(谐)函数．通常，这些函数更宜于写成一个复变量的实部(参看 § 24 的起始处)，例如，可设速度势为

$$\phi=\mathrm{re}[\phi_0(x,y,z)e^{-i\omega t}], \tag{63.16}$$

式中 ω 是波的频率．函数 ϕ_0 满足方程

$$\Delta\phi_0+\frac{\omega^2}{c^2}\phi_0=0, \tag{63.17}$$

该式是将(63.16)代入(63.7)后得出的．

现考虑沿 x 轴正方向传播的平面单色行波．在这种波中，所有量都只是 $x-ct$ 的函数，所以速度势的形式为

$$\phi=\mathrm{re}\left\{A\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\right\}, \tag{63.18}$$

式中，A 为一常数，称为**复振幅**．用实常数 a 和 α 将它表示为 $A=ae^{i\alpha}$，便得到

$$\phi=a\cos\left(\frac{\omega x}{c}-\omega t+\alpha\right). \tag{63.19}$$

常数 a 称为波的**振幅**，余弦函数的自变量称为**位相**．我们用 $\boldsymbol{n}$ 表示波传播方向的单位矢量，矢量

$$\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c}\boldsymbol{n}=\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{n} \tag{63.20}$$

称为**波矢**．用该矢量表示，(63.18)可以写为

$$\phi=\mathrm{re}\{A\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\}. \tag{63.21}$$

单色波是非常重要的，因为无论什么波都可以表示成具有各种波矢和频率的平面单色波的叠加．一个波分解成许多单色波，就是展成一个傅里叶级数或傅里叶积分(也称为**谱分解**)．这种展开式的项称为波的**单色分量**或**傅里叶分量**．

问　　题

问题 1　一个近乎均匀的二相系，由蒸汽及悬浮于其中的小液滴（“湿蒸

汽")或由液体及其中的小蒸汽泡所组成. 设声波的波长比体系不均匀性的尺度大得多,试求该体系中的声速.

解: 在二相系中,p 和 T 不是独立变量,而是由两个相平衡方程式关联的. 体系的压缩或稀疏总伴有一个相到另一个相的转变. 设 x 是体系中第二相所占的百分比(按质量计算),我们有

$$s=(1-x)s_1+xs_2,$$

$$V=(1-x)V_1+xV_2, \qquad (1)$$

式中,下标 1 和 2 用以区别纯属第一相和第二相的有关量. 为了计算导数 $(\partial V/\partial p)_s$,我们将其自变量由 p, s 变换到 p, x,得到

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_x-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_x\Big/\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_p.$$

于是,以(1)式代入,就给出

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s=x\left[\frac{dV_2}{dp}-\left(\frac{V_2-V_1}{s_2-s_1}\right)\frac{ds_2}{dp}\right]$$

$$+(1-x)\left[\frac{dV_1}{dp}-\left(\frac{V_2-V_1}{s_2-s_1}\right)\frac{ds_1}{dp}\right]. \qquad (2)$$

利用公式(63.8),可从(1)和(2)两个式子求出声速.

把上面对压力的全导数展开,引入由第一相转变到第二相的潜热 $[q=T(s_2-s_1)]$,并利用克拉珀龙-克劳修斯方程,求出沿相平衡曲线的导数 dp/dT $[dp/dT=p/T(V_2-V_1)]$,我们就得出(2)式中第一个方括号内的表达式,其形式为

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial p}\right)_T+\frac{2T}{q}\left(\frac{\partial V_2}{\partial T}\right)_p(V_2-V_1)-\frac{Tc_{p}{}^2}{q^2}(V_2-V_1)^2.$$

对第二个方括号,可作类似的变换.

设第一相是液体,第二相是蒸汽;并假设蒸汽是理想气体,比容 V_1 与比容 V_2 相比可以略去不计. 如果 $x\ll 1$(液体中含有一些蒸汽泡),则可求得声速

$$c=\frac{q\mu pV_1}{RT\sqrt{c_{p_1}T}}, \qquad (3)$$

式中,R 是气体常数,μ 是分子量. 一般说来,这个速度是很小的. 因此,当液体中形成蒸汽泡(空穴现象)时,声速会突然急剧下降.

如果 $(1-x)\ll 1$(蒸汽中含有一些液滴),就得到

$$\frac{1}{c^2}=\frac{\mu}{RT}-\frac{2}{q}+\frac{c_{p_2}T}{q^2}. \qquad (4)$$

将此声速和纯气体中的声速(63.15)对比，我们发现，此处由于加进第二相也使 c 值减小，尽管减小得并不显著.

当 x 从 0 增大到 1 时，声速从(3)式的值单调地增大到(4)式的值. 对于 $x=0$ 和 $x=1$ 来说，当系统从单相系转变为二相系时，声速就会发生跃变. 其结果是，对于非常接近于零或 1 的 x 值，即使声波是小振幅的，也不能再用通常的线性声学理论；在这种情况下，声波产生的压缩和稀疏将伴随有单相系和二相系之间的转变，因而声速为常值的基本假设就不再继续成立了.

问题 2 设将气体加热到很高的温度，以致平衡黑体辐射压力变得与气体压力大小相当，试确定此时气体中的声速.

解： 压力为

$$p=nkT+\frac{1}{4}akT^4,$$

而熵则是

$$s=\frac{k}{m}\ln\left(\frac{T^{\frac{3}{2}}}{n}\right)+\frac{akT^3}{n}.$$

在这些表达式中，第一项与粒子有关，第二项与辐射有关；n 是粒子的数密度，m 是粒子质量，k 是玻耳兹曼常数，且有

$$a=\frac{4\pi^2k^3}{45\hbar^3c^3}\text{①}.$$

物质的密度不受黑体辐射影响，所以 $\rho=mn$. 这里，用 u 表示声速以区别于光速 c，于是，

$$u^2=\frac{\partial(p,s)}{\partial(\rho,s)}=\frac{\partial(p,s)}{\partial(n,T)}\Big/\frac{\partial(\rho,s)}{\partial(n,T)},$$

式中的导数已写成雅可比行列式的形式. 计算出这些雅可比行列式后，我们得出

$$u^2=\frac{5kT}{3m}\left[1+\frac{2a^2T^6}{5n(n+2aT^3)}\right].$$

---

① 例如，参看 *Statistical Physics*, Pergamon Press, London, 1958, § 60 (中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹著，《统计物理学》，杨训恺等译，人民教育出版社，1964).

§ 64. 声波的能量和动量

现在来推导声波能量的表达式. 按照一般公式，单位体积流体的能量是 $\rho\epsilon+\frac{1}{2}\rho v^2$. 现以 $\rho=\rho_0+\rho'$, $\epsilon=\epsilon_0+\epsilon'$ 代入，其中带撇的字母表示有关量偏离流体静止时相对应量的值. 项 $\rho' v^2/2$ 是三阶小量，因此，如果最高取到二阶项，就得

$$\rho_0\epsilon_0+\rho'\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial\rho_0}+\frac{1}{2}\rho'^2\frac{\partial^2(\rho\epsilon)}{\partial\rho_0^2}+\frac{1}{2}\rho_0 v^2.$$

因为声波是一种绝热过程，这些导数要在等熵条件下计算. 由热力学关系式 $d\epsilon=Tds-pdV=Tds+(p/\rho^2)d\rho$ 可得

$$\left[\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial\rho}\right]_s=\epsilon+\frac{p}{\rho}=w,$$

因而，二阶导数为

$$\left[\frac{\partial^2(\rho\epsilon)}{\partial\rho^2}\right]_s=\left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_s=\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s=\frac{c^2}{\rho}.$$

这样，单位体积流体的能量为

$$\rho_0\epsilon_0+w_0\rho'+\frac{1}{2}\frac{c^2\rho'^2}{\rho_0}+\frac{1}{2}\rho_0 v^2.$$

这个表达式中的第一项 $\rho_0\epsilon_0$，是当流体处于静止状态时单位体积流体的能量，因而与声波无关. 第二项 $w_0\rho'$，是由于单位体积中流体质量的变化而引起的能量变化. 如果我们计算整个流体体积中能量的积分而得出总能量，则该项在总能量中将不出现，因为流体的总质量是不变的，即有

$$\int\rho dV=\int\rho\, dV,\ \text{或}\quad \int\rho' dV=0.$$

于是，由于声波而引起的流体总能量的改变就可以从下列积分求得:

$$\int\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2+\frac{1}{2}\frac{c^2\rho'^2}{\rho_0}\right)dV.$$

被积函数可以看成是声能的密度 E:

$$E=\frac{1}{2}\rho_0 v^2+\frac{1}{2}\frac{c^2\rho'^2}{\rho_0}. \tag{64.1}$$

如果是平面行波，这一表达式的形式将更为简单．在这种声波中，$\rho'=\rho_0 v/c$[参看(63.12)]，(64.1)式中的两项相等，因而有

$$E=\rho_0 v^2. \tag{64.2}$$

在一般情况下，这个关系式是不成立的．不过，对于总声能的(时间)平均值，我们可以得到一个类似的公式．根据力学上一个熟知的普遍定理，即小振动系统的平均总势能等于其平均总动能，就可直接得出这个公式．因为在此情况下，平均总动能为

$$\frac{1}{2}\int\rho_0\overline{v^2}dV,$$

并可求得平均总声能为

$$\int\overline{E}dV=\int\rho_0\overline{v^2}dV. \tag{64.3}$$

如果把一个非单色波用一系列单色波来表示，则其平均能量就等于诸单色波分量的平均能量之和．因为，若 $\boldsymbol{v}$ 表示为具有不同频率的各项之和，则 $\overline{v^2}$ 将包含每一项的平方以及不同频率项的乘积．这些乘积项含有形式为 $e^{i(\omega-\omega')t}$ 的因子，它们是时间的周期函数．而周期函数的平均值为零，所以这些项都等于零．于是，平均能量只含有单色波分量的均方项．

其次，我们来考虑某个有声波传播于其中的流体体积，并求通过包围该体积的封闭曲面的平均能量通量．根据(6.3)式，流体中的能量通量密度是 $\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)$. 在目前情况下，可略去 v^2 项，因为它是三阶项．因此，声波中的平均能量通量密度就是 $\overline{\rho w\boldsymbol{v}}$. 把 $w=w_0+w'$，代入，便得到 $\overline{\rho w\boldsymbol{v}}=w_0\overline{\rho\boldsymbol{v}}+\overline{\rho w'\boldsymbol{v}}$. 如焓的变化 w' 为

小量，则有 $w'=(\partial w/\partial p)_s p'$. 又因 $(\partial w/\partial p)_s=1/\rho$，就得到 $w'=p'/\rho$ 和 $\overline{\rho w \boldsymbol{v}}=w_0\overline{\rho\boldsymbol{v}}+\overline{p'\boldsymbol{v}}$. 于是，通过上述封闭曲面的总能量通量等于

$$\oint(w_0\overline{\rho\boldsymbol{v}}+\overline{p'\boldsymbol{v}})\cdot d\boldsymbol{f}.$$

然而，由于在所考虑体积中流体的总量平均来说是不变的，所以通过封闭曲面的质量通量的时间平均值就一定等于零. 因此，能量通量简化为

$$\oint\overline{p'\boldsymbol{v}}\cdot d\boldsymbol{f}.$$

可见，平均声能通量应以矢量

$$\boldsymbol{q}=\overline{p'\boldsymbol{v}} \tag{64.4}$$

来表示.

容易证明有下列关系式：

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot(p'\boldsymbol{v})=0. \tag{64.5}$$

正因为有这种形式，该方程就表示声能的守恒定律，而其中的矢量 $\boldsymbol{q}=p'\boldsymbol{v}$ 应理解为声能通量. 因此，此式不仅对于平均通量成立，而且对于任何瞬时的通量都是成立的.

在平面行波中，压力改变量和速度的关系为 $p'=c\rho_0 v$. 引用沿波之传播方向的单位矢量 $\boldsymbol{n}$（它与速度 $\boldsymbol{v}$ 方向相同），可得

$$\boldsymbol{q}=c\rho_0 v^2\boldsymbol{n}, \quad 或 \quad \boldsymbol{q}=cE\boldsymbol{n}. \tag{64.6}$$

因此，平面声波中的能量通量密度等于能量密度乘以声速，这是意料之中的结果.

现在来考虑这样的声波，它在任何给定的时刻占据空间一个有限的区域[①]（波包），要求出声波中流体的总动量. 单位体积流

① 该区域处处都不以固壁为边界.

体的动量等于质量通量密度 $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$. 把 $\rho=\rho_0+\rho'$ 代入，即得 $\boldsymbol{j}=\rho_0\boldsymbol{v}+\rho'\boldsymbol{v}$. 而密度变化和压力变化的关系是 $\rho'=p'/c^2$. 利用(64.4)式，我们就得到

$$\boldsymbol{j}=\rho_0\boldsymbol{v}+\frac{\boldsymbol{q}}{c^2}. \tag{64.7}$$

由于声波是有势流，可将速度写成 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$. 应当着重指出：这一结论并不是 § 63 中推导线性运动方程时所作近似处理的产物；因为导致 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$ 的解本身就是欧拉方程的一个精确解. 所以，$\boldsymbol{j}=\rho_0\nabla\phi+\boldsymbol{q}/c^2$. 声波中的总动量等于在声波所占体积上的积分 $\int\boldsymbol{j}dV$. $\nabla\phi$ 的积分可以变换为一个曲面积分，

$$\int\nabla\phi dV=\oint\phi d\boldsymbol{f}.$$

因为在声波所占体积之外，ϕ 值为零，故上述积分应为零. 所以，声波的总动量是

$$\int\boldsymbol{j}dV=\frac{1}{c^2}\int\boldsymbol{q}dV. \tag{64.8}$$

一般说来，这个量不为零. 非零总动量的存在表明有物质的迁移. 因此，我们得出结论：声波包的传播伴随有流体的迁移，这是一个二阶效应(因为 $\boldsymbol{q}$ 是二阶量).

最后，我们来计算声波中压力变化 p' 的平均值. 在一阶近似中，和通常的线性运动方程相对应，p' 是一个周期性地改变符号的函数，因而 p' 的平均值是零. 但是，如果取更高阶的近似，这一结果就不再成立. 假如我们只取到二阶量，p' 可以用从线性声学方程算得的量来表示，这样就用不着去直接求解由于考虑了高阶项而得出的非线性运动方程.

我们从伯努利方程 $w+\frac{1}{2}v^2+\partial\phi/\partial t=$ 常数出发，并取其时间

平均值．时间导数 $\partial\phi/\partial t$ 的平均值是零①．再设 $w=w_0+w'$，并把 w_0 放进常数中去，就得到 $\overline{w'}+\frac{1}{2}\overline{v^2}=$ 常数．我们设波在无限体积的流体中传播，并且在无穷远处衰减掉，即 $\boldsymbol{v}$、w' 等在无穷远处为零．既然常数在整个空间都相同，显然它一定为零，于是有

$$\overline{w'}+\frac{1}{2}\overline{v^2}=0. \tag{64.9}$$

然后，我们按 p' 的幂展开 w'，并且只取到二阶项：

$$w'=\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s p'+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2}\right)_s p'^2;$$

由于 $(\partial w/\partial p)_s=1/\rho$，就有

$$w'=\frac{p'}{\rho_0}-\frac{p'^2}{2\rho_0^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s=\frac{p'}{\rho_0}-\frac{p'^2}{2c^2\rho_0^2}.$$

将它代入(64.9)后，得出

$$\overline{p'}=-\frac{1}{2}\rho_0\overline{v^2}+\frac{\overline{p'^2}}{2\rho_0 c^2}=-\frac{1}{2}\rho_0\overline{v^2}+\frac{c^2\overline{\rho'^2}}{2\rho_0}, \tag{64.10}$$

上式给出了所求的平均值，右边的表达式是一个二阶量，它可以利用从线性化运动方程的解求得的 ρ' 与 v 计算出来．平均密度为

$$\overline{\rho'}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial p_0}\right)_s\overline{p'}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial p_0^2}\right)_s\overline{p'^2}. \tag{64.11}$$

如果在所讨论的体积中，声波可以看作平面行波，那么 $v=c\rho'/\rho_0$，从而 $\overline{v^2}=c^2\overline{\rho'^2}/\rho_0^2$，表达式(64.10)变为零．也就是说，平面波中的平均压力变化是高于二阶的效应．但是，密度变化

① 按照平均值的一般定义，可得出任意函数 $f(t)$ 的平均导数为

$$\overline{\frac{df}{dt}}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{df}{dt}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{f(T)-f(-T)}{2T}.$$

如果对所有的 t 值，$f(t)$ 保持有限值，则极限值为零，从而 $\overline{\frac{df}{dt}}=0$.

$\overline{\rho'}=\frac{1}{2}(\partial^2\rho/\partial p_0^2)_s\overline{p'^2}$ 并不为零[顺便提及，导数 $(\partial^2\rho/\partial p_0^2)_s$ 实际上总是负的，因此行波中 $\overline{\rho'}<0$]. 在相同的近似程度上，我们得出平面行波中动量通量密度张量的平均值为

$$\bar{p}\delta_{ik}+\overline{\rho v_j v_k}=p_0\delta_{ik}+\overline{\rho_0 v_i v_k}.$$

第一项是平衡压力，它和声波无关. 在第二项中，引用 $\boldsymbol{v}$ 方向的单位矢量 $\boldsymbol{n}$(和波传播的方向相同)，并利用(64.2)式，就得到声波中的动量通量密度为

$$\overline{\Pi}_{ik}=\bar{E}n_i n_k. \tag{64.12}$$

如果波沿 x 方向传播，则只有分量 $\overline{\Pi}_{xx}=\bar{E}$ 不为零. 因此，在这种近似程度上，平面声波中的平均动量通量只有 x 分量，它沿着 x 方向传递.

§65. 声波的反射和折射

当声波入射到两种不同流体介质的边界上时，要受到界面的反射和折射. 这就是说，除了入射波以外，还会产生另外两个波：一个(**反射波**)从分界面上返回到第一介质中传播，另一个(**折射波**)则传播到第二介质中去. 结果，在第一介质内是两个波(入射波和反射波)的合成，而在第二介质内只有一个波，即折射波.

这三个波之间的关系，由分界面上的下述两个边界条件确定：在边界的两侧，流体的压力相等，同时，界面的法向速度分量相等.

现在来考虑单色纵波在两种介质的分界平面上的反射和折射，并且将该平面取作 yz 平面. 不难看出，这三个波都有相同的频率 ω 以及相同的波矢分量 k_y, k_z, 但是，垂直于分界平面的波矢分量 k_x 是不相同的. 因为，在无限的均匀介质中，具有不变值 $\boldsymbol{k}$ 和 ω 的单色波满足运动方程. 边界的存在只是引进了若干边界

条件．在上述情况下，这些条件是加在 $x=0$ 的平面上的，就是说，它与时间或坐标 y,z 无关．因此，在整个空间和时间中，解式对 t、y 和 z 的依赖关系应保持不变，即 ω, k_y, k_z 和入射波中的相应各量应当相同．

从这一结果，我们可以直接导出决定反射波和折射波传播方向的关系式．设入射波所在平面为 x-y 平面，则在入射波中 $k_z=0$，并且该式在反射波和折射波中同样成立．于是，三个波的传播方向是共面的．

设 θ 为波的传播方向与 x 轴之间的夹角，那么，由于在入射波和反射波中的

$$k_y=\frac{\omega}{c}\sin\theta$$

彼此相等，就得到

$$\theta_1=\theta_1', \tag{65.1}$$

即，入射角 θ_1 等于反射角 θ_1'．从关于入射波和折射波的类似等式则可得出

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{c_1}{c_2}, \tag{65.2}$$

它给出了入射角 θ_1 和折射角 θ_2 之间的关系（c_1 和 c_2 是两种介质中的声速）．

为了得出三个波强度之间的定量关系，我们可将各有关速度势写为

$$\phi_1=A_1\exp\{i\omega[(x/c_1)\cos\theta_1+(y/c_1)\sin\theta_1-t]\},$$
$$\phi_1'=A_1'\exp\{i\omega[(-x/c_1)\cos\theta_1+(y/c_1)\sin\theta_1-t]\},$$
$$\phi_2=A_2\exp\{i\omega[(x/c_2)\cos\theta_2+(y/c_2)\sin\theta_2-t]\}.$$

在分界面（$x=0$）上，两种介质中的压力（$p=-\rho\partial\phi/\partial t$）和法向速度（$v_x=\partial\phi/\partial x$）必须分别相等；这些条件导致了下列等式：

$$\rho_1(A_1+A_1')=\rho_2A_2,$$

$$\frac{\cos\theta_1}{c_1}(A_1-A_1')=\frac{\cos\theta_2}{c_2}A_2.$$

我们定义**反射系数** R 为反射波和入射波中(时间)平均能量通量密度的比值. 因为平面波中的能量通量密度是 $c\rho v^2$,故有

$$R=\frac{c_1\rho_1\overline{v_1'^2}}{c_1\rho_1\overline{v_1^2}}=\frac{|A_1'|}{|A_1|^2}.$$

经过简单的计算可得

$$R=\left(\frac{\rho_2\operatorname{tg}\theta_2-\rho_1\operatorname{tg}\theta_1}{\rho_2\operatorname{tg}\theta_2+\rho_1\operatorname{tg}\theta_1}\right)^2. \tag{65.3}$$

角 θ_1 和 θ_2 之间的关系由(65.2)式表示，将 θ_2 用 θ_1 表出，就可以把反射系数写成如下形式:

$$R=\left[\frac{\rho_2c_2\cos\theta_1-\rho_1\sqrt{c_1^2-c_2^2\sin^2\theta_1}}{\rho_2c_2\cos\theta_1+\rho_1\sqrt{c_1^2-c_2^2\sin^2\theta_1}}\right]^2. \tag{65.4}$$

在垂直入射的情形($\theta_1=0$),这一公式简化为

$$R=\left(\frac{\rho_2c_2-\rho_1c_1}{\rho_2c_2+\rho_1c_1}\right)^2. \tag{65.5}$$

当入射角满足条件

$$\operatorname{tg}^2\theta_1=\frac{\rho_2^2c_2^2-\rho_1^2c_1^2}{\rho_1^2(c_1^2-c_2^2)} \tag{65.6}$$

时,反射系数为零,即声波被全折射. 如 $c_1>c_2$,但 $\rho_2c_2>\rho_1c_1$，或者这两个不等号都反过来,就会发生这种完全折射.

问　　题

试求两种流体界面上由声波而产生的压力.

解: 反射波和折射波的全部能量通量之和必须等于入射能量通量. 取分界面上每单位面积的能量通量，这一条件可写为 $c_1E_1\cos\theta_1=c_1E_1'\cos\theta_1+c_2E_2\cos\theta_2$,其中,$E_1$,$E_1'$ 和 E_2 是三种波中的能量密度. 引入反射系数 $R=\overline{E_1'}/\overline{E_1}$,即得

$$\overline{E}_2=\frac{c_1\cos\theta_1}{c_2\cos\theta_2}(1-R)\overline{E}_1.$$

所求压力 p 可用单位时间内由声波引起的（边界的单位面积上）动量 x 分量的损失来确定．利用声波中动量通量密度张量的表达式(64.12)，我们求出

$$p=\bar{E}_1\cos^2\theta_1+\overline{E_1'}\cos^2\theta_1-\bar{E}_2\cos^2\theta_2.$$

代入 $\bar{E}_2$ 的式子，引用 R，再利用(65.2)式，就得到

$$p=\bar{E}_1\sin\theta_1\cos\theta_1[(1+R)\operatorname{ctg}\theta_1-(1-R)\operatorname{ctg}\theta_2].$$

在垂直入射$(\theta_1=0)$的情形下，利用(65.5)式可得

$$p=2\bar{E}_1\left[\frac{\rho_1^2c_1^2+\rho_2^2c_2^2-2\rho_1\rho_2c_1^2}{(\rho_1c_1+\rho_2c_2)^2}\right].$$

§66. 几何声学

平面波有一个特有的性质，即波的传播方向和波幅在整个空间保持不变．当然，任意声波并没有这样的性质．然而，可能存在这样的情况：那里的声波虽不是平面波，但在每个小的空间区域内，仍然可以将它看作平面波．为此，在相当于波长量级的距离上，波幅和传播方向显然只容许有微小的变化．

如果这一条件成立，我们就可以引进**声线**的概念．这是这样一些曲线，在曲线任何一点上的切线方向，都和波传播的方向重合；于是我们可以说，声音是沿着声线传播的，而不去管它的波动性质．在这种情况下研究声音传播的规律，就是**几何声学**的课题．也可以说，几何声学对应于波长很小的极限情形，即$\lambda\to0$．

我们来推导几何声学的基本方程，它决定声线的方向．将声波速度势写为

$$\phi=a\varepsilon^{i\psi}. \tag{66.1}$$

在声波虽不是平面波但能适用于几何声学的情况下，波幅 a 是坐标和时间的缓变函数，而波的位相 ψ 则是“近乎线性”的函数（我们知道，在平面波中，$\psi=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\alpha$，$\boldsymbol{k}$ 和 ω 为常数）．对于小空间区域和短时间间隔，位相 ψ 可以展成级数；取到一阶项，我们有

$$\psi=\psi_0+\boldsymbol{r}\cdot\nabla\psi+t\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

根据声波在任何小空间区域(和短时间间隔)内可以看作平面波这一事实,我们定义每一点上的波矢和波频为

$$\boldsymbol{k}=\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{r}}\equiv\nabla\psi,\quad \omega=-\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{66.2}$$

量 ψ 称为程函.

在声波中有

$$\frac{\omega^2}{c^2}=k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2.$$

代入(66.2)式,就得到几何声学的基本方程:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=0. \tag{66.3}$$

如果流体是不均匀的,系数 $1/c^2$ 为坐标的函数.

我们从力学中知道,质点系的运动可以用哈密顿-雅可比方程确定,这种方程象(66.3)一样,是一个一阶偏微分方程. 类似于 ψ 的量是质点的作用量 S,而作用量的导数则确定动量 $\boldsymbol{p}=\partial S/\partial\boldsymbol{r}$ 和质点的哈密顿函数(能量) $H=-\partial S/\partial t$; 这些公式类似于 (66.2) 式. 我们还知道, 哈密顿-雅可比方程等价于哈密顿方程组:

$$\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{r}},\qquad \boldsymbol{v}\equiv\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{p}}.$$

从上述关于质点力学和几何声学之间的类比, 我们可以写出关于声线的类似方程为

$$\dot{\boldsymbol{k}}=-\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{r}},\qquad \dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}. \tag{66.4}$$

在均匀的各向同性介质中,$\omega=ck$,其中 c 为常数, 所以$\dot{\boldsymbol{k}}=0$, $\dot{\boldsymbol{r}}=c\boldsymbol{n}$($\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{k}$ 方向的单位矢量),正如我们预期的那样, 声线是以不变频率 ω 沿直线传播的.

当然,凡是在定常条件下,即介质的性质在空间每一点都不随

时间而改变时，沿着声线，频率总是保持不变的．这是因为，频率对于时间的全导数为

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial t}+\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{k}}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}},$$

它表示频率沿声线的变化率．把(66.4)式代入，把后面两项消去，而定常状态下又有 $\partial\omega/\partial t=0$，所以 $d\omega/dt=0$.

当声音在非均匀的静止介质中定常传播时，$\omega=ck$，其中 c 是坐标的已知函数．方程组(66.4)给出

$$\dot{\boldsymbol{r}}=c\boldsymbol{n},\quad \dot{\boldsymbol{k}}=-k\nabla c. \tag{66.5}$$

矢量$\boldsymbol{k}$的模按照 $k=\omega/c$ 的简单规律(ω 为常数)沿着声线变化．为了确定 $\boldsymbol{n}$ 方向的变化，可在(66.5)的第二式中令 $\boldsymbol{k}=\omega\boldsymbol{n}/c$:

$$\frac{\omega}{c}\dot{\boldsymbol{n}}-\left(\frac{\omega\boldsymbol{n}}{c^2}\right)(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla c)=-k\nabla c,$$

由此有

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{dt}=-\nabla c+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla c).$$

引入沿声线的微元长度$dl=c\,dt$，就可以把这个方程改写为

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{dl}=-\frac{1}{c}\nabla c+\frac{\boldsymbol{n}}{c}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla c). \tag{66.6}$$

该方程确定了声线的形状．$\boldsymbol{n}$ 是声线的切向单位矢量①.

如果解出方程 (66.3) 并且程函 ψ 是坐标和时间的已知函数，那末我们还可以求出声音强度的空间分布．在定常条件下，它可由方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{q}=0$ 得出($\boldsymbol{q}$ 为声能通量密度)，该方程在除声源以外的整个空间成立．令 $\boldsymbol{q}=cE\boldsymbol{n}$，其中 E 是声能密度[参见(64.6)]，并

---

① 由微分几何可知，沿声线的导数 $d\boldsymbol{n}/dl$ 等于 $\boldsymbol{N}/R$，式中 $\boldsymbol{N}$ 是沿主法线方向的单位矢量，R 是声线的曲率半径．暂且不管因子 $1/c$，(66.6)式右边的表达式就是声速沿主法线方向的导数．因此，可以写出方程 $1/R=-(1/c)\boldsymbol{N}\cdot\nabla c$．声线向着 c 值较小的一方弯曲.

记住$\boldsymbol{n}$是$\boldsymbol{k}=\nabla\psi$方向的单位矢量，就得到方程

$$\nabla\cdot\left(cE\frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|}\right)=0, \tag{66.7}$$

该方程确定了E的空间分布.

从频率对于波矢分量的已知依赖关系，应用(66.4)的第二个公式，可以求出波的传播速度. 这是一个非常重要的公式，它不但适用于声波，也适用于所有的波(例如，我们已经在§12中将它应用于重力波). 这里，我们将给出这个公式的另一种推导方法，这将明显地揭示出由此公式所定义的速度的含义. 我们现在考虑一个**波包**，它占据某个有限的空间区域. 假设波谱的成分包含着一些单色分量，而各分量的频率仅处于一个小范围内；对于它们的波矢分量也作同样假设. 设ω为波包的某个平均频率，而$\boldsymbol{k}$为平均波矢. 那么，在某个初始时刻，波包就可用下面形式的函数来描述：

$$\phi=\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r}). \tag{66.8}$$

函数$f(\boldsymbol{r})$仅仅在一个小区域内明显地异于零(但该区域的线尺度与波长$1/k$相比还是很大的). 根据上面的假设，它的傅里叶积分展开式包含$\exp(i\boldsymbol{r}\cdot\Delta\boldsymbol{k})$形式的分量，其中$\Delta\boldsymbol{k}$为一小量.

这样，在初始时刻的每个单色分量为

$$\phi_k=\text{常数}\times\exp[i(\boldsymbol{k}+\nabla\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}] \tag{66.9}$$

对应的频率是$\omega(\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k})$ (记住频率是波矢的函数). 于是，在时刻t，该分量就取以下形式：

$$\phi_k=\text{常数}\times\exp[i(\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}-i\omega(\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k})t].$$

利用$\Delta\boldsymbol{k}$为小量这一事实，将$\omega(\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k})$展成级数，只取前两项，得到$\omega(\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k})=\omega+(\partial\omega/\partial\boldsymbol{k})\cdot\Delta\boldsymbol{k}$，式中，$\omega=\omega(\boldsymbol{k})$是对应于平均波矢的频率. 因此，$\phi_k$为

$$\phi_k=\text{常数}\times\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\exp\left[i\Delta\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{r}-t\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\right] \tag{66.10}$$

如果我们将所有出现于波包中的$\Delta \boldsymbol{k}$值的单色分量加起来，由(66.9)和(66.10)式，就可知道结果为

$$\phi=\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]f\left(\boldsymbol{r}-t\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}\right), \tag{66.11}$$

其中f是(66.8)式中的同一函数. 与(66.8)式对比，可知在经过t时间后，波幅分布的图象整个地移动了一段距离$t\cdot\partial\omega/\partial\boldsymbol{k}$；(66.11)式中$f$前的指数因子只影响位相. 因此，波包的传播速度为

$$\boldsymbol{U}=\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}. \tag{66.12}$$

这一公式给出了对ω与$\boldsymbol{k}$的任何一种依赖关系均适用的传播速度①. 当$\omega=ck$，且c为常数时，这公式当然就给出$U=\omega/k=c$这一通常的结果. 一般地说，当$\omega(\boldsymbol{k})$为一任意函数时，传播速度是频率的函数，并且波的传播方向可以不同于波矢的方向.

问　　题

设声音在处于重力作用下的等温大气中传播，试求其振幅随高度的变化.

解：在(被看成是理想气体的)等温大气中，声速为一常数. 显然，沿声线的能量通量密度以与声源的距离r的平方成反比这一规律而减小：$c\rho\overline{v^2}\sim1/r^2$. 由此可知，声波中速度涨落的幅度，沿声线以反比于$r\sqrt{\rho}$的规律变化；根据大气压公式$\rho\sim\exp(-\mu gz/RT)$，其中z是高度，μ是气体的分子量，R是气体常数.

---

① 由(66.12)式定义的速度称为波的**群速度**，比值ω/k称为**相速度**. 然而必须记住，相速度并不对应于波的实际物理传播.

关于上述推导，要强调指出的是，(66.11)式所表明的波包在运动中形状不变(即不改变波幅的空间分布)，是在Δk范围很小这一假设下所得到的近似结果. 在一般情况下，当U与ω有关时，波包在传播期间向外"展平"，并使波包所占空间区域增大. 可以证明，这种"展平"的程度，正比于波包成份中的波矢范围Δk的平方值.

§67. 声音在运动介质中的传播

频率与波数之间的关系 $\omega=ck$，只对静止介质中传播的单色声波才成立. 对于在运动介质中传播(在固定坐标系中观察)的声波，也不难得出一个类似的关系式.

我们考虑速度为 $\boldsymbol{u}$ 的均匀流. 取一个坐标为 x, y, z 的固定参考系K，并取一个坐标为 x', y', z' 且相对于K以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动的参考系 K'. 在 K' 参考系中，流体处于静止，因此，单色波的速度势可取通常的形式：$\phi=$常数$\times\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'-kct)]$. K' 系中的矢径 $\boldsymbol{r}'$ 与K系中矢径 $\boldsymbol{r}$ 的关系为 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t$. 于是，在固定坐标系中，声波的速度势具有这样的形式：$\phi=$常数$\times\exp\{i[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-(kc+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u})t]\}$，指数中 t 的系数即为波的频率 ω. 这样，运动介质中的波频与波矢 $\boldsymbol{k}$ 的关系为

$$\omega=ck+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}. \tag{67.1}$$

传播速度为

$$\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}=c\frac{\boldsymbol{k}}{k}+\boldsymbol{u}; \tag{67.2}$$

这是 $\boldsymbol{k}$ 方向的速度 c 与速度 $\boldsymbol{u}$ 的矢量和，而声音正是以速度 $\boldsymbol{u}$随流体运动.

利用公式(67.1)，我们可以研究所谓**多普勒效应**：由一个相对于声源而运动的观察者所接收到的声音频率，不同于声源振动的频率.

假设有一个以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动的观察者，接收到由一个静止声源(相对于介质而言)发出的声音. 在相对于介质为静止的参考系K'中，有 $k=\omega_0/c$，其中 ω_0 是声源振动的频率. 而在随观察者一起运动的参考系K中，介质以速度$-\boldsymbol{u}$ 运动，于是按照(67.1)式，声音的频率为 $\omega=ck-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}$. 设速度 $\boldsymbol{u}$ 方向与波矢 $\boldsymbol{k}$ 方向之间的夹

角为 θ，并且令 $k=\omega_0/c$，就求得运动观察者所接收到的声音频率为

$$\omega=\omega_0[1-(u/c)\cos\theta]. \tag{67.3}$$

在一定意义上说，与此相反的情况是：由运动声源发出的声波在静止的介质中传播. 设 $\boldsymbol{u}$ 是声源的速度，并假设从固定坐标系变换到随声源运动的坐标系 K'；在坐标系 K' 中，流体以速度 $-\boldsymbol{u}$ 运动. 在声源处于静止的坐标系 K' 中，所发出的声波频率一定等于声源的振动频率 ω_0. 改变(67.1)式中 $\boldsymbol{u}$ 的符号，并引用 $\boldsymbol{u}$ 方向与 $\boldsymbol{k}$ 方向之间的夹角 θ，就得到 $\omega_0=ck[1-(u/c)\cos\theta]$. 但是，在原来的固定坐标系 K 中，频率与波矢的关系是 $\omega=ck$，这样，我们就有

$$\omega=\frac{\omega_0}{1-(u/c)\cos\theta}. \tag{67.4}$$

这一公式给出了运动声源的振动频率 ω_0 与静止观察者听到的声音频率 ω 之间的关系 .

如果声源作远离观察者的运动，则声源的速度和声源到观察者的连线方向两者的夹角 θ，将处于 $\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 的范围内，所以 $\cos\theta>0$. 于是由(67.4)式得知：如果声源作远离观察者的运动，听到的声音频率将小于 ω_0.

反之，如果声源正在逐渐接近观察者，则 $0\leqslant\theta<\pi/2$，从而 $\cos\theta>0$. 于是，频率 $\omega>\omega_0$，且随着 u 的增大而增大. 当 $u\cos\theta>c$ 时，按照公式(67.4)，ω 将变成负值，这表示观察者所听到的声音实际上是以相反的次序到达的，也就是说，声源在任何给定的时刻发出的声音，比在以前时刻发出的声音更早地到达观察点.

§ 66一开始就指出，几何声学近似对应于波长很小(即波矢值很大)的情形. 为了做到这一点，声音频率一般说来必定很大. 但是在运动介质的声学中，如果介质速度超过了声速，则后一个条件

就不一定需要满足．因为在这种情况下，即使频率为零，k 也可以很大；由(67.1)式，可得 $\omega=0$ 时的方程为

$$ck=-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}, \tag{67.5}$$

并且，当 $u>c$ 时，这个方程是有解的．这样，在以超声速运动的介质中，(如果 k 充分大)就存在着可用几何声学描述的定常小扰动．这意味着这些扰动沿声线传播．

例如，我们来考虑以不变速度 $\boldsymbol{u}$ 运动的均匀超声速流，$\boldsymbol{u}$ 的方向取作 x 轴方向．让矢量 $\boldsymbol{k}$ 处于 xy 平面内，其分量之间的关系为

$$(u^2-c^2)k_x^2=c^2k_y^2. \tag{67.6}$$

该式是由方程(67.5)两边取平方得到的．为了确定声线的形状，可利用几何声学方程(66.4)，于是有

$$\dot{x}=\frac{\partial\omega}{\partial k_x},\quad \dot{y}=\frac{\partial\omega}{\partial k_y}.$$

将其中一个方程除以另一个方程，得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial\omega/\partial k_y}{\partial\omega/\partial k_x}.$$

但是，根据隐函数的微分法则，这个关系式恰好是频率不变(现在是零)条件下的导数 $-\partial k_x/\partial k_y$．于是，从 k_x 和 k_y 之间的已知关系确定声线形状的方程为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial k_x}{\partial k_y}. \tag{67.7}$$

把(67.6)代入上式，得到

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{c}{\sqrt{u^2-c^2}}.$$

如果 u 不变，这一方程代表两条与 x 轴交成 $\pm\alpha$ 角的直线，而 $\sin\alpha=c/u$．

在气体动力学中，这些射线的概念是十分重要的．我们将重

新给予详细的研究，尤其应参看§79，§96和§109.

问　题

问题1. 设声音在定常运动的均匀介质中传播，介质速度分布为 $\boldsymbol{u}(x,y,z)$，且 $u\ll c$ 处处成立，试导出表示声线形状的方程①.

解: 以(67.1)式代入(66.4)，就得到下列形式的声线传播方程:

$$\dot{\boldsymbol{k}}=-(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\boldsymbol{k}\times(\nabla\times\boldsymbol{u}),$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}\equiv\boldsymbol{v}=c\boldsymbol{k}/k+\boldsymbol{u}.$$

利用这些方程以及

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\equiv\frac{\partial\boldsymbol{u}}{dt}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\approx\frac{c}{k}(\boldsymbol{k}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$$

算出导数 $d(\boldsymbol{k}v)/dt$，并且只保留到$\boldsymbol{u}$的一阶项，结果为 $d(\boldsymbol{k}v)/dt=-kv\boldsymbol{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})$，其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{v}$ 方向的单位矢量. 但是 $d(\boldsymbol{k}v)/dt=\boldsymbol{n}d(kv)/dt+kvd\boldsymbol{n}/dt$. 又因为 $\boldsymbol{n}$ 与 $d\boldsymbol{n}/dt$ 是正交的(因为 $n^2=1$，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{n}}=0$)，由上面的方程即可得出$\dot{\boldsymbol{n}}=-\boldsymbol{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})$. 引用沿声线的微元长度 $dl=cdt$，最后可写出

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{dl}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{u}). \tag{1}$$

这一方程就确定了声线的形状；$\boldsymbol{n}$ 是单位切向矢量(并且不再与 $\boldsymbol{k}$ 同向).

问题2. 试确定具有速度分布为 $u_x=u(z)$，$u_y=u_z=0$ 的运动介质中声线的形状.

解: 将问题1中的方程(1)展开，得到

$$\frac{dn_x}{dl}=\left(\frac{n_z}{c}\right)\frac{du}{dz},\qquad \frac{dn_y}{dl}=0;$$

因为 $n^2=1$，所以无需写出关于 n_z 的方程. 第二个方程给出 $n_y=$常数$\equiv n_{y,0}$. 在第一个方程中，令 $n_z=dz/dl$，于是，经过积分得出 $n_x=n_{x,0}+u(z)/c$. 这些公式就是所要求的解.

假设 $z=0$ 时速度 u 为零，并且向上递增($du/dz>0$). 如果声音是“逆风”传播($n_x<0$)，它的迹线就会向上弯曲；如果是“顺风”传播，它的迹线就向下弯曲. 在后一种情况下，一条从 $z=0$ 出发，并与 x 轴成一小角度(即 $n_{x,0}$ 接近于1)的声线，只能上升到有限的高度 $z=z_{max}$，这一高度可计算如下：在

① 假设仅当速度 $\boldsymbol{u}$ 在远大于声音波长的距离上才发生显著的改变.

z_{max} 高度，声线是水平的，即 $n_z=0$，于是有

$$n_x^2+n_y^2\approx n_{x,0}^2+n_{y,0}^2+2n_{x,0}\frac{u}{c}=1,$$

所以 $2n_{x,0}u(z_{max})/c=n_{z,0}^2$. 由此，就可以从给定的函数 $u(z)$ 和声线的初始方向 $\boldsymbol{n}_0$ 求出 z_{max}.

问题3. 试求出定常运动介质中声线的费马原理表达式.

解： 费马原理是说，在两个给定点之间沿声线所取的积分 $\oint \boldsymbol{k}\cdot d\boldsymbol{l}$ 为一极小值；假定式中的 $\boldsymbol{k}$ 是以频率 ω 和声线方向 $\boldsymbol{n}$ 的函数表示.① 这一函数，可以从关系式 $\omega=ck+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}$ 和 $v\boldsymbol{n}=c\boldsymbol{k}/k+\boldsymbol{u}$ 中消去 v 和 k 以后求得. 于是，费马原理具有下列形式：

$$\delta\oint\{\sqrt{(c^2-u^2)dl^2+(\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{l})^2}-\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{l}\}/(c^2-u^2)=0.$$

在静止介质中，该积分简化为通常的表达式 $\oint\frac{dl}{c}$.

§68. 本征振动

迄今，我们只讨论了无限介质中的振动. 特别是，我们知道了可在这种介质中传播任意频率的波.

当我们研究有限尺度容器中的流体时，情况则大不一样. 运动方程本身(波动方程)当然是不变的，但是，这些方程现在要补充一些边界条件，而这些条件必须在固壁或是流体自由表面上得到满足. 这里，我们只考虑所谓**自由振动**，即在没有交变外力作用时所发生的振动. 由外力作用而产生的振动称为**受迫振动**.

在有限体积的流体中，运动方程并不是对每一频率都存在满足相应边界条件的解，这种解仅对于一系列确定的频率 ω 才存在. 换句话说，在有限体积的介质中，自由振动只有在某些特定频率下才能产生. 这些频率称为有关容器中流体的**本征频率**.

---

① 参看 *The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley Press, Cambridge (Mass), 1951, § 7-1(中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹著，《场论》，任朗、袁炳南译，人民教育出版社，1959).

本征频率的实际数值决定于容器的大小和形状．在任何给定的情况下，都存在一组无限序列的本征频率．为了求得这些值，必须将运动方程和相应的边界条件一道加以研究．

从尺度上分析，就立刻可以知道第一个(即最小的)本征频率的数量级．问题中所给出的具有长度量纲的参数唯有物体的线尺度 l，因此显而易见，对应于第一个本征频率的波长 λ_1，一定是 l 的量级．于是，用声速除以波长，就得到频率 ω_1 本身的量级．这样，

$$\lambda_1 \sim l, \quad \omega_1 \sim c/l. \tag{68.1}$$

现在来确定本征振动的运动特性．如果我们寻求关于（比如说）速度势波动方程的解，它们具有时间周期性，其形式为 $\phi = \phi_0(x,y,z)e^{-i\omega t}$，则得到关于 ϕ_0 的方程：

$$\Delta\phi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\phi_0 = 0. \tag{68.2}$$

在无限介质中，不需要附加什么边界条件，这个方程就可以具有实解和复解．特别是，它有一个正比于 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 的解，其速度势的形式为

$$\phi = \text{常数} \times \exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)].$$

这样的解，代表以确定速度传播的波——行波．

然而，对于有限体积的介质，一般说来，复解是不存在的．这从以下的分析可以看出．ϕ_0满足的方程是实数型的，边界条件也是实数型的．因此，如果$\phi_0(x,y,z)$是运动方程的一个解，则其复共轭函数 ϕ_0^* 也是一个解．但由于一般情况下满足给定边界条件的方程的解是唯一的①(常数因子除外)，一定有 $\phi_0^* = \text{常数} \times \phi_0$，其中的常数为一复数，其模数显然为1．于是，必有 $\phi_0 = f(x,y,z) \times e^{-i\alpha}$，式中函数 f 和常数 α 都是实的．这样，速度势 ϕ 的形式(取

① 当容器的形状具有高度的对称性时(例如球形)，这种说法就不一定成立．

$\phi_0 e^{-i\omega t}$的实部)为

$$\phi = f(x,y,z)\cos(\omega t+\alpha). \tag{68.3}$$

也就是说，它是某个坐标函数和时间简谐函数的乘积.

这种解的性质，与行波的性质完全不同. 在行波的情况下，ϕ $=$常数$\times\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\alpha)$；除了 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 正好相差波长整数倍的那些点以外，空间诸不同点在任何给定时刻的振动位相 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t+\alpha$都是不同的. 而在(68.3)式所表示的波中，在任何给定的时刻，所有点的振动位相 $\omega t+\alpha$ 都相同. 这样的波显然不会“传播”，所以称之为**驻波**. 因此，本征振动都是指驻波.

现在来考察一种平面驻声波，其中所有的量都仅仅是一维坐标(比如 x)以及时间的函数. 把$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\phi_0=0$的通解写成：$\phi_0=a\cos\left(\frac{\omega}{c}x+\beta\right)$，就得到$\phi=a\cos(\omega t+\alpha)\cos\left(\frac{\omega}{c}x+\beta\right)$. 适当选择 x 和 t 的原点，可以使 α 和 β 为零，于是有

$$\phi=a\cos\omega t\cos\frac{\omega}{c}x. \tag{68.4}$$

关于波中的速度和压力，可求得为

$$v=\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\left(\frac{a\omega}{c}\right)\cos\omega t\sin\frac{\omega}{c}x;$$

$$p'=-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}=\rho a\omega\sin\omega t\cos\frac{\omega}{c}x.$$

在相距为 $\pi c/\omega=\lambda/2$ 的 $x=0,\pi c/\omega,2\pi c/\omega,\cdots$诸点上，速度 v 始终为零；这些点称为速度的**节点**. 两节点之间的中点($x=\pi c/2\omega$, $3\pi c/2\omega,\cdots$) 是速度随时间变化幅度为最大的点，这些点称为**腹点**. 显然，压力 p' 的波节和波腹正好和上述位置相反. 因此，在平面驻波中，压力的波节正好是速度的波腹，反之亦然.

本征振动有一个有趣的情形，即气体在开有一个小孔的容器

内振动(**共振器**). 我们知道,在一个封闭容器中,最小的本征频率是 c/l 的量级,其中 l 是容器的线度. 但是,当有一个小孔时,就会出现小得多的新本征振动频率. 这是因为,如果容器内外的气体出现一个压力差,这个压力差将会被气体流进或流出容器的运动所平衡. 于是,就产生了伴有共振器与外部介质之间的气体交换的振动. 既然孔很小,这种交换就只能缓慢地进行,因而振动周期很长,相应地频率也就很低(参看本节问题 2). 至于发生于封闭容器中普通的振动频率,实际上是不会由于有了一个小孔而有所改变的.

问　题

问题 1. 试确定盛有流体的长方体容器中声波的本征频率.

解: 我们寻求方程(68.2)具有下述形式的解:

$$\phi_0 = 常数 \times \cos qx \cos ry \cos sz,$$

其中,$q^2+r^2+s^2=\omega^2/C^2$. 在容器壁上,边界条件为

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \ (x=0, a);$$

$$\partial\phi/\partial y = 0, \ (y=0, b);$$

$$\partial\phi/\partial z = 0, \ (z=0, c).$$

其中,a, b, c 为长方体的边长. 于是,我们求得

$$q = \frac{m\pi}{a}, \quad r = \frac{n\pi}{b}, \quad s = \frac{p\pi}{c},$$

其中,m, n, p 是任意整数. 这样,本征频率为

$$\omega^2 = C^2\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right)^{①}.$$

问题 2. 共振器的孔口周连一根截面积为 S、长度为 l 的细管,试求其本征频率.

解: 因管子很细,在研究由于气体从容器中流进、流出而引起的振动时,

---

① 公式中 π^2 前面的 C 为声速. ——中译者注

我们可以假设只有管子里的气体有明显的速度，而容器中的气体则几乎处于静止．管内气体的质量是 $S\rho l$，作用在它上面的力为 $S(p_0-p)$，其中 p 和 p_0 分别为共振器内外的气体压力．因此，必须满足 $S\rho l\dot{v}=S(p-p_0)$，这里 v 是管内气体的速度．压力的时间导数可由 $\dot{p}=c^2\dot{\rho}$ 求出，而单位时间内共振器中气体密度的减小量 $-\dot{\rho}$，则可认为等于每单位时间内离开共振器的气体质量 $S\rho v$ 除以共振器的容积 V，于是有 $\dot{p}=-c^2S\rho v/V$，由此得

$$\ddot{p}=-c^2S\rho\dot{v}/V=-c^2S(p-p_0)/lV.$$

该方程给出 $p-p_0=$ 常数 $\times\cos\omega_0 t$，其中，本征频率 $\omega_0=c\sqrt{\frac{S}{lV}}$. 此值与 c/L 相比为一小量（L 是容器的线尺度），可见波长远远大于 L.

在求解这一问题时，已经假设了管内气体振动的线振幅远小于管长 l. 假如情况不是这样，则振动将伴随有较大部份的管内气体流出细管，此时就不能应用上面所用的线性运动方程了．

§69. 球面波

现在来研究一种声波，其中密度、速度等的分布只依赖于离某一点的距离，就是说，这些量的分布是球对称的．这种波称为**球面波**.

让我们先来求描述球面波的波动方程的通解．考虑速度势的波动方程 $\Delta\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$. 因为 ϕ 只是离球心的距离 r 和时间 t 的函数，利用球坐标系中拉普拉斯算符的表达式，就得到

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right). \tag{69.1}$$

我们寻求形式为 $\phi=\frac{f(r,t)}{r}$ 的解．代入方程，经过简单的计算，就得到关于 f 的下列方程：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

这正好是以半径 r 作为坐标变量的通常的一维波动方程．我们知

道，这个方程的解具有下面的形式：

$$f=f_1(ct-r)+f_2(ct+r),$$

其中 f_1 和 f_2 是任意函数．于是，方程(69.1)的通解为

$$\phi=\frac{f_1(ct-r)}{r}+\frac{f_2(ct+r)}{r}. \tag{69.2}$$

第一项表示从原点向空间所有方向传播的出射波，第二项则表示由外向中心传播的汇聚波．与平面波的波幅保持不变不同，球面波的波幅随着离开中心距离的增大成反比地减小．波的强度以波幅的平方表示，因此，它以与距离平方成反比的规律减弱；这是理所当然的，因为波的总能量通量分布在一个球面上，球面积随着 r^2 的增大而增大．

压力和密度的改变量和速度势的关系为 $p'=-\rho\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$，　$\rho'=-\dfrac{\rho}{c^2}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$，而它们的分布用和(69.2)形式相同的公式表示．但由速度势的梯度所确定的(径向)速度分布为

$$v=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{f_1(ct-r)+f_2(ct+r)}{r}\right\}. \tag{69.3}$$

如果原点没有声源，当 $r=0$ 时，速度势(69.2)必须保持有限值．为此，必定有 $f_1(ct)=-f_2(ct)$，即 ϕ 的形式为

$$\phi=\frac{f(ct-r)-f(ct+r)}{r} \tag{69.4}$$

(球面驻波)．另一种情形是，如果在原点有一个声源，则由它向外的出射波的速度势为 $\phi=f(ct-r)/r$；这速度势在 $r=0$ 点不一定要保持有限值，因为解只是对声源以外的区域成立．

单色球面驻波的速度势形式为

$$\phi=Ae^{-i\omega t}\frac{\sin kr}{r}, \tag{69.5}$$

其中 $k=\omega/c$．而出射的单色球面波则由下式确定：

$$\phi = A\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}. \tag{69.6}$$

值得指出，该表达式满足微分方程：

$$\Delta\phi + k^2\phi = -4\pi A e^{-i\omega t}\delta(\boldsymbol{r}), \tag{69.7}$$

方程的最右边是 δ 函数： $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. 除原点外，处处有 $\delta(\boldsymbol{r}) = 0$. 这样就回到了齐次方程(69.1)；而在一个包含原点在内的小球体上将 (69.7) 式积分［此时表达式 (69.6) 简化为 $Ae^{-i\omega t}/r$］，则在两边得到的都是 $-4\pi Ae^{-i\omega t}$.

现在来考察出射的球面波，它占据了球壳外的区域，而球壳外的介质是处于静止或近乎静止的；这种波可以由一个仅在有限时间间隔内发射声波的点源产生，也可以由某个存在声扰动的区域产生(参看 §71 的末尾和 §73 的问题 4). 在任何给定点上，当声波到达之前，速度势 $\phi \equiv 0$. 声波通过以后，运动必然消失；这表明 ϕ 必须变为常数. 然而，在出射球面波中，速度势为 $\phi = \dfrac{f(ct-r)}{r}$ 形式的函数；这种函数只有在函数 f 恒等于零时才能变为一个常数. 因而，在波通过的前后，速度势一定都是零①. 由此，我们可以得出关于球面波中疏密分布的一个重要结论.

声波中压力变化和速度势的关系是 $p' = -\rho\partial\phi/\partial t$. 根据以上所述，可以清楚地看出，如果我们对一个给定的 r 在全部时间过程中积分 p'，其结果将为零：

$$\int_{-\infty}^{\infty} p'\, dt = 0. \tag{69.8}$$

这意味着，当球面波通过一个给定点时，在该点将观察到稠密($p' > 0$)和稀疏($p' < 0$)两种状态. 在这方面，球面波与平面波迥然不同，平面波可以只包含稠密状态，或者只包含稀疏状态.

---

①这和平面波中发生的情况不同，在平面波通过后，则有 $\phi =$ 常数 $\neq 0$。

如果我们在给定的时刻，考察 p' 随距离变化的方式，会看到类似的情形；此时，我们不考虑积分(69.8)而考虑另一个等于零的积分

$$\int_0^\infty rp'\,dr=0$$

问　　题

问题 1. 在初始时刻，气体在半径为 a 的球内压缩到 $\rho'=$常数$\equiv\Delta$；在该球的外边，$\rho=0$. 设在整个空间内初始速度均为零，试求以后的运动.

解： 关于速度势 ϕ 的初始条件为：当 $t=0, r<a$ 或 $r>a$ 时，有 $\phi=0$；当 $t=0$ 时，$\dot{\phi}=F(r)$，其中，对 $r>a, F(r)=0$；对 $r<a$，则 $F(r)=-c^2\Delta/\rho$. 我们寻求下列形式的 ϕ：

$$\phi(r,t)=\frac{f(ct-r)-f(ct+r)}{r}.$$

由初始条件，我们得到 $f(-r)-f(r)=0, f'(-r)-f'(r)=rF(r)/c$. 从第一个方程，可得 $f'(-r)+f'(r)=0$，将它和第二个方程联立，即可给出 $f'(r)=-f'(-r)=-rF(r)/2c$. 最后，把 $F(r)$ 的值代入，便求得导数 $f'(\xi)$ 和函数 $f(\xi)$ 本身的表达式如下：

当 $|\xi|>a$ 时，$f'(\xi)=0, f(\xi)=0$；

当 $|\xi|<a$ 时，$f'(\xi)=c\xi\Delta/2\rho, f(\xi)=c(\xi^2-a^2)\Delta/4\rho$.

这就是问题的解. 如果我们考察 $r>a$，即初始压缩区外的一个点，可得密度为

当 $t<(r-a)/c$ 时，$\rho'=0$；

当 $(r-a)/c<t<(r+a)/c$ 时，$\rho'=\frac{1}{2}(r-ct)\Delta/r$；

当 $t>(r+a)/c$ 时，$\rho'=0$.

声波在时间间隔 $2a/c$ 内通过所考虑的点；换句话说，波的形状是一个厚度为 $2a$ 的球壳，在时刻 t，该球壳位于半径为 $ct-a$ 和 $ct+a$ 的两个球面之间. 球壳内，密度线性地变化；在外侧部分 $(r>ct)$，气体受到压缩 $(\rho'>0)$，而在内侧部分 $(r<ct)$，气体变得稀薄 $(\rho'<0)$.

问题 2. 试确定半径为 a 的球形容器内中心对称的声振动的本征频率.

解： 当 $r=a$ 时，由边界条件 $\partial\phi/\partial r=0$(此处的 ϕ 由(69.5)式给出)，可

得出 $\operatorname{tg}(ka)=ka$，该式确定了全部本征频率. 第一个(最低的)频率是 $\omega_1=4.49c/a$.

§ 70. 柱面波

现在来研究一种声波，其中所有物理量的分布沿某一方向(我们取该方向为 z 轴)是均匀的，同时相对于此轴具有完全的轴对称性. 这种波称为**柱面波**. 在柱面波中有

$$\phi=\phi(R,t),$$

其中，R 表示离 z 轴的距离. 现在来确定波动方程的这种轴对称的通解. 我们可以从球对称的通解(69.2)着手研究. 由于 R 和 r 的关系是 $r^2=R^2+z^2$，所以，当 R 和 t 给定时，公式(69.2)给出的 ϕ 将依赖于 z. 仅依赖于 R 和 t，而且满足波动方程的函数，可由积分(69.2)式而得到，积分时，可从 $z=-\infty$ 积到 $z=+\infty$，从 0 积到 ∞ 也是可以的. 我们可以把对 z 的积分变换为对 r 的积分，因为 $z=\sqrt{r^2-R^2}$，$dz=rdr/\sqrt{r^2-R^2}$. 当 z 从 0 变化到 ∞ 时，r 就从 R 变到 ∞. 因此，我们求得轴对称的通解为

$$\phi=\int_R^\infty\frac{f_1(ct-r)}{\sqrt{r^2-R^2}}dr+\int_R^\infty\frac{f_2(ct+r)}{\sqrt{r^2-R^2}}dr, \tag{70.1}$$

其中的 f_1 和 f_2 为任意函数. 第一项为出射的柱面波，第二项为汇聚的柱面波.

在这些积分中作代换：$ct\pm r=\xi$，还可以把公式(70.1)改写为

$$\phi=\int_{-\infty}^{ct-R}\frac{f_1(\xi)d\xi}{\sqrt{(ct-\xi)^2-R^2}}+\int_{ct+R}^{\infty}\frac{f_2(\xi)d\xi}{\sqrt{(\xi-ct)^2-R^2}}. \tag{70.2}$$

我们看出，在出射的柱面波中，t 时刻的速度势值由 f_1 在 $-\infty$ 到 $t-R/c$ 这段时间内的值所确定；类似地，影响汇聚波的则是 f_2 在 $t+R/c$ 到 ∞ 这段时间内的值.

如同球面波一样，当 $f_1(\xi)=-f_2(\xi)$ 时，就得到驻波. 可以证明，柱面驻波也可以用下面形式的公式来表示：

$$\phi=\int_{ct-R}^{ct+R}\frac{F(\xi)d\xi}{\sqrt{R^2-(\xi-ct)^2}},\tag{70.3}$$

这里的 $F(\xi)$ 是另一个任意函数.

我们来推导单色柱面波的速度势表达式. 柱坐标中关于速度势 $\phi(R,t)$ 的波动方程为

$$\frac{1}{R}\ \frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)-\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0.$$

在单色波中, $\phi=e^{-i\omega t}f(R)$, 因此, 我们可以得到关于函数 $f(R)$ 的方程: $f''+f'/R+k^2f=0$. 这是零阶的贝塞耳方程. 在柱面驻波中, ϕ 在 $R=0$ 处为有限值; 适合这个条件的解为 $J_0(kR)$, 这里 J_0 是第一类贝塞耳函数. 于是, 在柱面驻波中,

$$\phi=Ae^{-i\omega t}J_0(kR).\tag{70.4}$$

当 $R=0$ 时, 函数 J_0 趋于 1, 从而振幅趋于有限的极限 A. 在远距离的 R 处, J_0 可用它的渐近表达式代替, 于是, ϕ 取以下形式:

$$\phi=A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(kR-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{kR}}e^{-i\omega t}.\tag{70.5}$$

对应于出射的单色行波解为

$$\phi=Ae^{-i\omega t}H_0^{(1)}(kR).\tag{70.6}$$

这里 $H_0^{(1)}$ 是第一类零阶汉克尔(Hankel)函数. 当 $R\to0$ 时, 该函数有一个对数奇点:

$$\phi\cong\frac{2iA}{\pi}\ln(kR)e^{-i\omega t}\tag{70.7}$$

在远距离处, 适用渐近公式

$$\phi=A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\exp\left[i(kR-\omega t-\frac{\pi}{4})\right]}{\sqrt{kR}}.\tag{70.8}$$

由此可见, (在远距离处)柱面波的振幅与离轴的距离的平方根成反比地减小, 因而强度按 $1/R$ 的规律减小. 这一结果是显而易见

的，因为总能量通量分布在整个圆柱面上，当波传播时，圆柱面的面积是正比于 R 而增大的.

出射柱面波与球面波、平面波相比有一个重要的差别，即柱面波只有前阵面，而无后阵面. 就是说，一旦声扰动到达某一点以后，它不会突然中止，而是随着 $t\to\infty$，声音相当缓慢地衰减. 假设(70.2)式第一项中的函数 $f_1(\xi)$ 只在某个有限范围 $\xi_1\leqslant\xi\leqslant\xi_2$ 内异于零，则当时间满足 $ct>R+\xi_2$ 时，就有

$$\phi=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{f_1(\xi)d\xi}{\sqrt{(ct-\xi)^2-R^2}}.$$

当 $t\to\infty$ 时，这个表达式以

$$\phi=\frac{1}{ct}\int_{\xi_1}^{\xi_2}f_1(\xi)d\xi$$

的规律趋于零，即 ϕ 与时间 t 成反比.

这样，由一个仅在有限时间内作用的声源所产生的出射柱面波，随着 $t\to\infty$，其速度势将缓慢地趋于零. 这意味着，和球面波的情况相类似，p' 对所有时间的积分为零：

$$\int_{-\infty}^{\infty}p'dt=0. \tag{70.9}$$

因此，柱面波也像球面波那样，必然包含稠密和稀疏两种状态.

§ 71. 波动方程的通解

现在我们来推导一个一般公式，它将给出任意初始条件下无限流体中波动方程的解，即用初始时刻流体中的速度和压力分布给出任意时刻的速度和压力分布.

我们首先建立一些辅助公式. 设 $\phi(x,y,z,t)$ 和 $\psi(x,y,z,t)$ 是波动方程的任意两个解，它们在无穷远处为零. 考虑在整个空间上的积分

$$I=\int(\phi\dot{\psi}-\psi\dot{\phi})dV,$$

并计算其对时间的导数．因为ϕ和ψ满足方程

$$\Delta\phi-\ddot{\phi}/c^2=0$$

和

$$\Delta\psi-\ddot{\psi}/c^2=0,$$

因而有

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt}&=\int(\phi\ddot{\psi}-\psi\ddot{\phi})dV\\&=c^2\int(\phi\Delta\psi-\psi\Delta\phi)dV\\&=c^2\int\nabla\cdot(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)dV.\end{aligned}$$

最后的积分可以变换为在无穷远处某个曲面上的面积分，因而该积分为零．于是，我们可以断定$dI/dt=0$，即I与时间无关：

$$\int(\phi\dot{\psi}-\psi\dot{\phi})dV=\text{常数}. \tag{71.1}$$

其次，我们来考察波动方程的下列特解：

$$\psi=\frac{\delta[r-c(t_0-t)]}{r} \tag{71.2}$$

（其中r为离某给定点O的距离，t_0是某确定的时刻，δ为δ函数），并计算ψ对整个空间的积分．于是

$$\begin{aligned}\int\psi dV&=\int_0^\infty\psi\cdot4\pi r^2dr\\&=4\pi\int_0^\infty r\cdot\delta[r-c(t_0-t)]dr.\end{aligned}$$

当$r=c(t_0-t)$时（假定$t_0>t$），δ函数的自变量为零，于是，由δ函数的性质，求得

$$\int\psi dV=4\pi c(t_0-t). \tag{71.3}$$

将此方程对时间微分，得到

$$\int\dot{\psi}dV=-4\pi c. \tag{71.4}$$

现在，用函数(71.2)代换积分(71.1)中的 ψ，并取 ϕ 为待求的波动方程的通解．根据(71.1)式，I 为常数；利用这一点，我们写出 I 在时刻 $t=0$ 和 $t=t_0$的表达式，并令两式相等．当 $t=t_0$ 时，ψ 和 $\dot{\psi}$这两个函数中的任何一个，都只在 $r=0$时才异于零．因此，在计算积分时，可以在 ϕ 和 $\dot{\phi}$ 中令 $r=0$(即取它们在点 O 的值)，并可将 ϕ 和 $\dot{\phi}$ 移到积分号外，于是得

$$I=\phi(x,y,z,t_0)\int\dot{\psi}dV-\dot{\phi}(x,y,z,t_0)\int\psi dV,$$

式中，x,y,z 是点 O 的坐标．根据(71.3)和(71.4)式，当 $t=t_0$时，第二项为零，而第一项给出

$$I=-4\pi c\phi(x,y,z,t_0).$$

我们再来计算 $t=0$ 时的 I 值，令 $\dot{\psi}=\partial\psi/\partial t=-\partial\psi/\partial t_0$，并以 ϕ_0代表函数 ϕ 在 $t=0$ 时的值，即有

$$I=-\int\left(\phi_0\frac{\partial\psi}{\partial t_0}+\dot{\phi}_0\psi\right)dV$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t_0}\int\phi_0\psi_{t=0}dV-\int\dot{\phi}_0\psi_{t=0}dV.$$

将体积元写成 $dV=r^2drdo$，其中 do 为立体角元，然后利用 δ 函数的性质，可得

$$\int\phi_0\psi_{t=0}dV=\int\phi_0r\delta(r-ct_0)drdo$$

$$=ct_0\int\phi_{0,r=ct_0}do;$$

$\dot{\phi}_0\psi$的积分也可作类似的处理，于是有

$$I=-\frac{\partial}{\partial t_0}\left(ct_0\int\phi_{0,r=ct_0}do\right)-ct_0\int\dot{\phi}_{0,r=ct_0}do.$$

最后，令 I 的两个表达式相等，并省去 t_0的下标，即得

$$\phi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int\phi_{0,r=ct}do\right)+t\int\dot{\phi}_{0,r=ct}do\right\}. \quad (71.5)$$

这一公式称为**泊松公式**，根据它由某一初始时刻给定速度势及其时间导数的分布（或者等价地，给定速度和压力分布），此式即可确定任意时刻速度势的空间分布．可见，t 时刻某一点 O 的速度势值是由 $t=0$ 时某球面上的 ϕ 和 ϕ 值所确定的；该球面的中心在 O 点，其半径等于 ct.

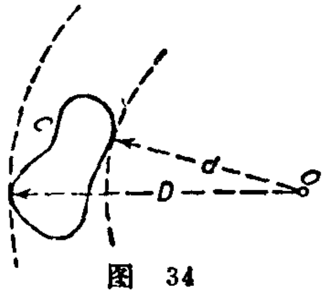


图 34

现假设，初始时刻的 ϕ_0 和 ϕ_0 仅在某个有限的空间区域中异于零，该区域的边界为一个封闭曲面 C（图34）．我们来考察 ϕ 在后续时间中在某点 O 的值．这些值将由那些与点 O 相距为 ct 的各点的 ϕ_0 和 ϕ_0 值所确定：而只有当

$$d/c \leqslant t \leqslant D/c$$

时，半径为 ct 的球面才能穿过曲面 C 内部的区域，其中 d 和 D 是点 O 到曲面的最小和最大距离，在其它时刻，(71.5)式的被积函数为零．因此，O 点上的运动始于时刻 $t=d/c$，结束于时刻 $t=D/c$. 由 C 内部的区域传出来的声波就有一个前阵面和一个后阵面．当前阵面达到所讨论的点时，运动即开始；而当后阵面到达时，原来振动的质点就转入静止状态。

问　　题

当声波仅决定于两个坐标 x 和 y 时，试导出由初始条件确定的速度势公式.

解：半径为 ct 的球面上的面积元可以写成 $df=c^2t^2do$，其中 do 是立体角元，df 在 xy 平面上的投影是 $dxdy=df\sqrt{c^2t^2-\rho^2}/ct$，
这里 ρ 是点 (x,y) 到球心的距离．对比这两个表达式，可以写出 $do=dxdy/ct\sqrt{c^2t^2-\rho^2}$.
用 (x,y) 表示待求 ϕ 值的那一点的坐标，并用 ξ,η 表示积分域中动点的坐标，于是，我们就可将一般公式(71.5)中的 do 代以

$$\frac{d\xi d\eta}{ct\sqrt{c^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}},$$

因为 $dxdy$ 是 xy 平面两侧的两个面元的投影，故可将得到的表达式加倍，从而求得

$$\phi(x,y,t)=\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\iint\frac{\phi_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{c^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi c}\iint\frac{\dot{\phi}_0(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{c^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}},$$

上式是在以 O 为圆心，以 ct 为半径的圆上积分的. 如果除了 xy 平面上的一个有限区域 C 以外（或者更确切地说，是除母线平行于 z 轴的柱状区域以外），ϕ 和 $\dot{\phi}$ 均为零，则点 O 上的振动（图 34）在 $t=d/c$ 时开始，其中 d 是点 O 到该区域的最短距离. 但是，在此时刻以后，以 $ct>d$ 为半径，以 O 为圆心的圆将始终包括区域 C 的一部分或者全部，因而 ϕ 将只能渐近地趋于零. 所以，和三维波不一样，这里所讨论的二维波有一个前阵面，却没有后阵面（参看 § 70）.

§ 72. 旁向波

球面波在两种介质分界面上反射，是一种特别有趣的情形，原因在于，它可能伴随有一种异乎寻常的现象即产生**旁向波**.

设 Q（图 35）是介质 1 中球面声波的源，它离介质 1 和 2 之间无限大分界平面的距离为 l. 距离 l 是任意的，并且不需要远大于波长. 设两种介质的密度为 ρ_1, ρ_2，而其声速为 c_1, c_2. 我们先假设 $c_1>c_2$，那么，在离声源距离远大于 λ 的那些地方，介质 1 中的运动将是两种出射波的迭加. 其中之一是由声源发出的球面波（**直射波**），它的速度势为

$$\phi_1^0=\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{72.1}$$

这里，r 是离声源的距离，振幅不妨取为 1. 为简明起见，我们在本节的所有表达式中都略去因子 $e^{-i\omega t}$.

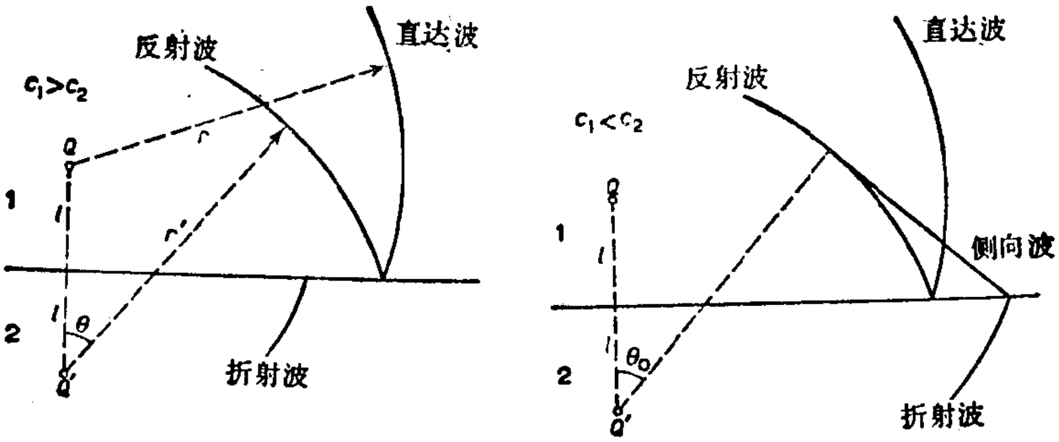


图 35

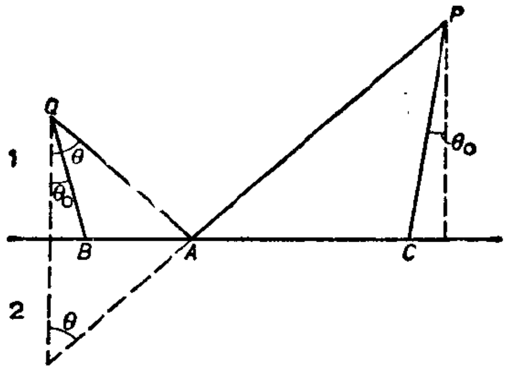


图 36

第二个波(**反射波**)的波面是以 Q' 为球心的球面，Q' 是声源 Q 对于分界平面的映象．这个波面是点集 P 的位置，而点集 P 是同时从 Q 点发出的声线簇按几何声学规律从分界平面反射后在某一确定时刻所到达的那些点(在图 36 上画出了一条声线 QAP，其入射角和反射角均为 θ)．反射波的振幅随着离 Q' 点(有时称之为**虚源**)的距离 r' 成反比地减小，但是这振幅还和 θ 角有关，好象每条声线在反射时有一个反射系数，该反射系数相当于平面波在给定入射角 θ 的反射系数．换言之，在远距离处，反射波由下面的公式给出：①

$$\phi_1' = \frac{e^{ikr'}}{r'}\left[\frac{\rho_2 c_2 \cos\theta - \rho_1\sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2\theta}}{\rho_2 c_2 \cos\theta + \rho_1\sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2\theta}}\right]; \qquad (72.2)$$

① 式中的 $\cos\theta$ 是中译者加的，原文疑误．——中译者注

此处请参看关于平面波反射系数的公式(65.4). 上式对于大的r'值显然是正确的，它也可以根据下面介绍的方法严格地导出来.

更有趣的是$c_1<c_2$的情况. 此时，除去普通的反射波(72.2)以外，在第一种介质中还会出现另一个波. 从下面的简单分析中，可以看出这种波的主要性质.

普通反射波的声线QAP(图36)，在下列意义上适合费马原理，即在完全处于介质1内并包括一次反射的所有路径当中，声线是从Q到P的最速路径. 但是，当$c_1<c_2$时，另有一条路径也适合费马原理：声线以全内反射的临界角$\theta_0(\sin\theta_0=c_1/c_2)$入射到界面上，然后在介质2中沿界面传播，最后又以$\theta_0$的角度返回到介质1. 这条路径就是图36中的$QBCP$，并且显然有$\theta>\theta_0$. 容易看出，这条路径也具有极值性质：通过该路径所用的时间，小于通过其它任何一条从Q到P，并局部穿过介质2中的路径所需的时间.

设有一些声线同时离开声源Q，沿着路径QB传播，又从不同的C点回到介质1；所有这些声线在同一时刻所到达的点P的几何轨迹，显然是一个锥面，该锥面的母线垂直于从虚源Q'引出且与界面法线成θ_0角的直线.

因此，如果$c_1<c_2$，则在介质1中，与具有球阵面的普通反射波一起传播的，还有一个具有锥形波阵面的波，而这个波又是从分界平面(此处，它和介质2中折射波的波阵面相遇)一直延伸到与反射波的球阵面相切，相切处在波阵面与以θ_0为半锥角、以QQ'为轴的锥面的交线上(图35). 这个锥面波称为**旁向波**.

经过简单的计算不难得知，沿路径$QBCP$(图36)所需的时间比沿路径QAP到达同一点P所需的时间还要少些. 这表明，从声源Q发出的声音讯号，首先是作为旁向波到达位于P点的观察者，然后才以普通反射波的形式到达.

必须记住，尽管可以用几何声学的概念得到上面所给出的关

于旁向波的简单解释，但它却是一种波动声学的效应．以后将会知道，在 $\lambda\to 0$ 的极限情况下，旁向波的波幅是趋于零的．

现在，我们来进行定量计算．由点源发出的单色声波可以用方程(69.7)描述：

$$\Delta\phi+k^2\phi=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}),\tag{72.3}$$

其中 $k=\omega/c$，$\boldsymbol{l}$ 是声源的矢径．这样选取 δ 函数的系数，是为了使直达波具有(72.1)的形式．下面，我们取一个坐标系，以 xy 平面为分界面，z 轴沿 QQ' 方向，第一种介质处于 $z>0$ 的一侧．在分界面上，压力和速度的 z 分量，或者(等价地) $\rho\phi$ 和 $\partial\phi/\partial z$，必须是连续的．

应用一般的傅里叶方法，可写出下列形式的解：

$$\phi=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_k(z)\exp[i(k_x x+k_y y)]dk_x dk_y,\tag{72.4}$$

式中，

$$\phi_k(z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi\cdot\exp[-i(k_x x+k_y y)]dxdy.\tag{72.5}$$

根据对于 xy 平面的对称性，ϕ_k 显然只能依赖于量

$$|\kappa|=\sqrt{\kappa_x^2+\kappa_y^2}.$$

利用熟知的公式

$$J_0(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(u\sin\phi)d\phi,$$

可以将(72.4)式写为

$$\phi=2\pi\int_0^{\infty}\phi_\kappa(z)J_0(\kappa R)\kappa d\kappa,\tag{72.6}$$

这里，$R=\sqrt{x^2+y^2}$ 是圆柱坐标(离 z 轴的距离)．最好采用下列计算把这一公式中的积分变换为 $-\infty$ 到 ∞ 的积分，并且将被积函数用汉克尔函数 $H_0^{(1)}(u)$ 表示．汉克尔函数在点 $u=0$ 有一个对数奇点；如果我们约定，u 值从正实数变到负实数是从复平面 u 内点

$u=0$的上方越过，则有 $H_0^{(1)}(-u)=H_0^{(1)}(ue^{i\pi})=H_0^{(1)}(u)-2J_0(u)$. 利用这一关系式，可以将(72.6)改写为

$$\phi=\pi\int_{-\infty}^{\infty}\phi_\kappa(z)H_0^{(1)}(\kappa R)\kappa d\kappa. \tag{72.7}$$

由方程(72.3)，我们求得关于函数 ϕ_κ的方程为

$$\frac{d^2\phi_\kappa}{dz^2}-\left(\kappa^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi_\kappa=-\frac{1}{\pi}\delta(z-l). \tag{72.8}$$

要消除方程右边的 δ 函数，可以对(满足齐次方程的)函数 ϕ_κ 加上 $z=l$ 处的边界条件：

$$\begin{gathered}[\phi_\kappa(z)]_{l+}-[\phi_\kappa(z)]_{l-}=0,\\ \left[\frac{d\phi_\kappa}{dz}\right]_{l+}-\left[\frac{d\phi_\kappa}{dz}\right]_{l-}=-\frac{1}{\pi}.\end{gathered} \tag{72.9}$$

$z=0$ 处的边界条件为

$$\begin{gathered}[\rho\phi_\kappa]_{0+}-[\rho\phi_\kappa]_{0-}=0,\\ \left[\frac{d\phi_\kappa}{dz}\right]_{0+}-\left[\frac{d\phi_\kappa}{dz}\right]_{0-}=0.\end{gathered} \tag{72.10}$$

我们寻求下列形式的解：

$$\left.\begin{aligned}&\phi_\kappa=Ae^{-\mu_1 z} \quad 当\ z>l\ 时,\\ &\phi_\kappa=Be^{-\mu_1 z}+Ce^{\mu_1 z} \quad 当\ l>z>0\ 时,\\ &\phi_\kappa=De^{\mu_2 z} \quad 当\ 0>z\ 时.\end{aligned}\right\} \tag{72.11}$$

这里 $\mu_1^2=\kappa^2-k_1^2,\ \mu_2^2=\kappa^2-k_2^2\ (k_1=\omega/c_1, k_2=\omega/c_2)$，同时应当设

$$\begin{aligned}&\mu=+\sqrt{\kappa^2-k^2} \quad 当\ \kappa>k,\\ &\mu=-i\sqrt{k^2-\kappa^2} \quad 当\ \kappa<k.\end{aligned} \tag{72.12}$$

上面解的第一式这样选取，是为了保证当 $z\to\infty$时 ϕ 不会无限增大；而第二式这样选取，则是因为ϕ 必须代表一个出射波. 由边界条件(72.9)和(72.10)可求出四个方程式，用于确定系数 A,B,C,D. 经过简单的计算后便得

$$B = C\frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1},\ C = \frac{e^{-l\mu_1}}{2\pi\mu_1},$$

$$D = C\frac{2\rho_1\mu_1}{\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1},\ A = B + Ce^{2l\mu_1}. \tag{72.13}$$

当 $\rho_2=\rho_1, c_2=c_1$(即整个空间内为一种介质)时，B 等于零，且 $A=Ce^{2l\mu_1}$；ϕ 中对应的项显然就是直达波(72.1)，因此，我们感兴趣的反射波为

$$\phi_1' = \pi\int_{-\infty}^{\infty} B(\kappa)e^{-z\mu_1}H_0^{(1)}(\kappa R)\kappa d\kappa. \tag{72.14}$$

在这一表达式中，必须规定出积分路线. 我们已经指出，它应在(复平面 κ 内的)奇点 $\kappa=0$ 的上方越过. 在 $\kappa=\pm k_1, \pm k_2$(即 μ_1 或 μ_2为零)的那些点上，被积函数也有奇点(支点). 根据条件(72.10)，围道必须从点 $+k_1$，$+k_2$的下方和点 $-k_1$，$-k_2$的上方越过.

现在来研究远离声源处所适用的表达式. 将汉克尔函数用熟知的渐近公式来代换，即得

$$\phi_1' = \int_C \frac{\mu_1\rho_2 - \mu_2\rho_1}{\mu_1(\mu_1\rho_2 + \mu_2\rho_1)}\sqrt{\frac{\kappa}{2i\pi R}}\exp[-(z+l)\mu_1 + i\kappa R]d\kappa. \tag{72.15}$$

图 37 绘出了 $c_1>c_2$情况下的积分路线 C. 积分可以用鞍点法计算. 指数 $i[(z+l)\sqrt{k^2-\kappa^2}+\kappa R]$ 在点

$$\frac{\kappa}{\sqrt{k_1^2-\kappa^2}} = \frac{R}{z+l} = \frac{r'\sin\theta}{r'\cos\theta} = \mathrm{tg}\theta,$$

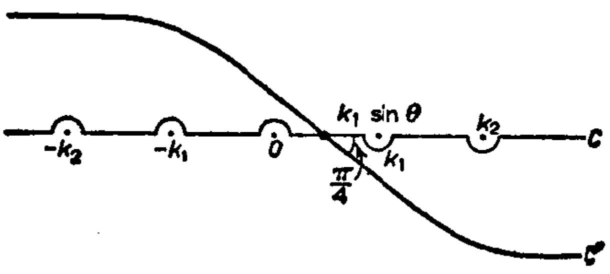


图 37

即 $\kappa=k_1\sin\theta$ 处，有一个极值点，其中 θ 是入射角(参看图 35). 将积分路线变换到 C'，它通过该极值点并与横坐标轴成 $\pi/4$ 角，就可以算得公式(72.2).

在 $c_1<c_2$(即 $k_1>k_2$)的情况下，如果

$$\sin\theta>\frac{k_2}{k_1}=\frac{c_1}{c_2}=\sin\theta_0,$$

即如果 $\theta>\theta_0$(图 38)，则点 $\kappa=k_1\sin\theta$ 处于 k_2 和 k_1 之间. 此时，围道 C' 必须绕过点 k_2 并弯成一个环线. 因此，除普通的反射波(72.2)外，还有一个由沿环线的积分(72.15)所表示的波 ϕ''_1，环线记作 C''. 这个波就是旁向波. 如果点 $k_1\sin\theta$ 不是很接近 k_2，即 θ 角不是很接近全内反射角 θ_0，这个积分是容易算出的①.

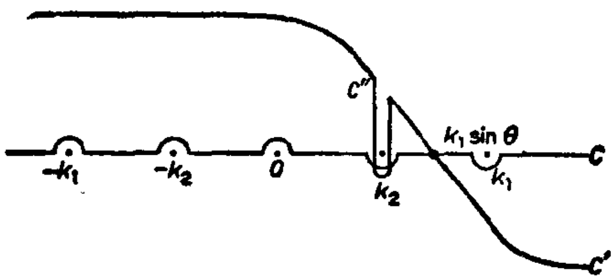


图 38

在 $\kappa=k_2$ 点附近，μ_2 为一小量；我们可将(72.15)的被积函数中指数项系数展成 μ_2 的幂级数. 零阶项在 $\kappa=k_2$ 点没有奇性，因此它沿 C'' 的积分为零. 于是得到

$$\phi''_1=-\int_{C''}\frac{2\mu_2\rho_1}{\mu_1^2\rho_2}\sqrt{\frac{\kappa}{2i\pi R}}\exp[-(z+l)\mu_1+i\kappa R]d\kappa. \quad (72.16)$$

将指数函数展开成 $\kappa-k_2$ 的幂级数，并沿环线 C'' 积分，经过简单的计算，就得出旁向波速度势的下列表达式:

① 关于适用于一切 θ 值的旁向波的研究，可参看 Л. 布列霍夫斯基，*Журнал Технической физики*, 18, 455, 1948. 这篇文章也求出了普通反射波对于 λ/R 的幂级数展开式的第二项. 这里，我们不妨指出，当 θ 角接近 θ_0 时(在 $c_1<c_2$ 的情况下)，修正项和首项之比随着距离增大，不是按 λ/R 的规律，而是按 $(\lambda/R)^{\frac{1}{4}}$ 的规律减小的.

$$\phi_1'' = \frac{2i\rho_1 k_2 \exp[ik_1 r' \cos(\theta_0-\theta)]}{r'^2 \rho_2 k_1^2 \sqrt{\cos\theta_0 \sin\theta \sin^3(\theta_0-\theta)}}. \tag{72.17}$$

波面应是锥面：

$$r'\cos(\theta-\theta_0) = R\sin\theta_0 + (z+l)\cos\theta_0 = 常数.$$

这和前面得到的结果一致. 在确定的方向上，波幅与距离 r' 的平方成反比地减小. 我们还可看出，在 $\lambda\to 0$ 的极限情况下，旁向波消失. 当 $\theta\to\theta_0$ 时，表达式(72.17)不再成立；实际上，在这种 θ 值范围内，旁向波的振幅将随着距离之增大按 r' 的规律衰减.

§73. 声发射

在流体中振动的物体，引起邻近流体的周期性压缩和稀疏，因而产生声波. 这些声波带走的能量是由物体的动能所提供的，所以，我们可以称之为振动物体的声发射. ①

在任意形状物体以任意方式振动的一般情况下，声波发射问题必须按下述方法求解. 我们取速度势 ϕ 为基本量，ϕ 满足波动方程

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \tag{73.1}$$

在物体的表面上，流体速度的法向分量必须等于物体速度 $\boldsymbol{u}$ 的相应分量：

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = u_n. \tag{73.2}$$

在远离物体的地方，声波必然变为一个出射的球面波. 满足这些

① 以下我们将始终假设物体的振动速度 u 远远小于声速. 既然 $u\sim a\omega$，其中 a 是振动的线振幅，这就意味着 $a\ll\lambda$.

一般说来，还要假设振幅远远小于物体的线尺度，否则，在物体附近就不存在势流(参看§9). 只有在纯粹体积脉动的情况下，这个条件才不是必需的，下面所用到的解式(73.7)，其实是连续方程的直接推论.

边界条件和无穷远处条件的方程(73.1)的解，确定了物体所发射的声波.

有两种情形的边界要详细研究一下. 首先，我们设物体的振动频率足够大，以致发射波的波长远远小于物体的线尺度 l，即

$$\lambda \ll l. \tag{73.3}$$

在这种情况下，我们可以把物体的表面分成若干部分，每一部分的线尺度很小，小得使各部分都可以近似地看成平面，但比起波长来，还是大得多. 于是，我们可以设想每块这样的表面发射一个平面波，波中的流体速度，就是那块物体表面速度的法向分量 u_n. 而平面波中的平均能量通量是 $c\rho\overline{v^2}$(参看 § 64)，其中 v 是波中的流体速度. 令 $v=u_n$，并沿整个物体表面将这个能量通量积分，就得到物体在每单位时间内以声波形式发射的平均能量，即发射声波的总强度，其结果为

$$I = c\rho \oint \overline{u_n^2}\, df. \tag{73.4}$$

该发射强度与振动频率无关(对给定的速度振幅而言).

现在来考察相反的极限，即发射波长远大于物体线尺度的情形:

$$\lambda \gg l. \tag{73.5}$$

此时，在物体附近(离物体的距离远小于波长的地方)，可以把一般方程(73.1)中的 $(1/c^2)\partial^2\phi/\partial t^2$ 项略去. 因为在这一区域中，该项的量级为 $\omega^2\phi/c^2 \sim \phi/\lambda^2$，而对坐标的二次导数项则是 ϕ/l^2 的量级.

这样，物体附近的流动就满足拉普拉斯方程 $\triangle\phi=0$. 这是不可压缩流体的势流方程. 因此，物体附近的流体，宛如不可压缩流体那样运动. 声波本身，即压缩波和稀疏波，只在离物体很远处才出现.

在相当于物体线尺度量级或更小量级的距离上，待求的方程$\Delta\phi=0$之解不能写成一般形式，而是和振动物体的实际形状有关．但在比l大得多的距离上(不过，仍须远小于波长λ，方程$\Delta\phi=0$才能成立)，利用ϕ必须随着距离增大而减小这一事实，我们可以求得解的一般形式．在§11中，已经讨论过拉普拉斯方程的这类解，仿照该节，把解的一般形式写为

$$\phi=-\frac{a}{r}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right),\qquad(73.6)$$

其中，r是离物体内某个任意取定的原点的距离．这里所考虑的距离，当然必须比物体的线尺度大得多，因为否则我们就不能只限于讨论ϕ中某些随着r增大而减小得最慢的项．我们已把两项都写进(73.6)式了，不过必须记住，其中的第一项有时是不出现的(参看下文)．

现在来研究在何种情况下，这个$-a/r$项不等于零．我们在§11中曾发现，速度势$-a/r$导致一个非零的质量通量通过包围物体的封闭曲面，这个通量的值为$4\pi\rho a$．但是，在不可压缩流体中，这一质量通量，只能在曲面内流体总体积发生改变的情况下才能产生．换句话说，物体的体积一定有变化，其结果，不是流体从这一体积中排出，就是流体被“吸入”．因此，(73.6)式中的第一项在下述情况下出现，即发声物体不断地进行脉动，而在脉动过程中，物体的体积发生变化．

现在假设存在上述情况，要确定声发射的总强度．按照前面的分析，流过封闭曲面的流体体积$4\pi a$，必等于物体体积V在每单位时间内的变化，也就是等于导数dV/dt(体积V是时间的给定函数)：$4\pi a=\dot{V}$．于是，在满足条件$l\ll r\ll\lambda$的距离r上，流体的运动由函数$\phi=-\dot{V}(t)/4\pi r$确定．但是，在$r\gg\lambda$的距离上(即在“声波区”)，ϕ必代表一个出射的球面波，就是说，其形式必定是

$$\phi=-\frac{f(t-r/c)}{r}. \tag{73.7}$$

因此，我们立刻可以作出结论：在所有比 l 大得多的距离上，发射波的形式为

$$\phi=-\frac{\dot{V}(t-r/c)}{4\pi r} \tag{73.8}$$

它是用 $t-r/c$ 代换 $\dot{V}(t)$ 中的自变量 t 而得到的.

每一点上的速度 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$ 都沿其矢径的方向，它的大小则为 $v=\partial\phi/\partial r$. 如在 $r\gg\lambda$ 的距离上微分(73.8)式，因为分母的微分将得出的 $1/r$ 高阶项可以忽略不计，故只需取式中分子的导数就行了. 又由于 $\frac{\partial}{\partial r}\dot{V}\left(t-\frac{r}{c}\right)=-\frac{1}{c}\ddot{V}\left(t-\frac{r}{c}\right)$，就得到

$$\boldsymbol{v}=\frac{\ddot{V}(t-r/c)}{4\pi cr}\boldsymbol{n}, \tag{73.9}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量.

声强度是用速度的平方表示的，在这里，它与发射的方向无关，即发射是各向同性的. 每单位时间内的总发射能的平均值为

$$I=\rho c\oint\overline{v^2}df=\left(\frac{\rho}{16c\pi^2}\right)\oint\frac{\overline{\ddot{V}^2}}{r^2}df,$$

这里是在一个包围原点的封闭曲面上积分. 把该曲面取为半径等于 r 的球面，并注意到被积函数只和离原点的距离有关，最后得到

$$I=\frac{\rho}{4\pi c}\overline{\ddot{V}^2}. \tag{73.10}$$

这就是声发射的总强度. 可以看出，I 是由物体体积的二次时间导数的平方确定的.

如果物体作频率为 ω 的谐和脉动，体积对时间的二次导数正比于振动的频率和速度振幅. 当给定物面上各点的速度振幅时，这一导数的均方值就正比于频率的平方. 但是，当给定振动的振幅时，速度振幅自身又和频率成正比，所以发射强度正比于 ω^4.

现在我们来考察没有体积变化的振动物体的声发射. 此时, (73.6)式中就只剩下第二项,我们把它写为
$\phi=\nabla\cdot[\mathbf{A}(t)/r]$. 与前一种情形类似, 我们可以推断, 在所有 $r\gg l$ 的距离上,解的一般形式都是

$$\phi=\nabla\cdot\left[\frac{\mathbf{A}(t-r/c)}{r}\right].$$

可立即看出, 这一表达式确是波动方程的一个解;因为函数$A(t-r/c)/r$ 是一个解,所以它对坐标的导数也是解. 再次只对式中分子进行微分,就得出(在 $r\gg\lambda$ 的距离上)

$$\phi=-\frac{\dot{\mathbf{A}}(t-r/c)\cdot\mathbf{n}}{cr}. \tag{73.11}$$

为了计算速度 $\mathbf{v}=\nabla\phi$,我们需要再次只对 $\mathbf{A}$ 进行微分. 于是,利用矢量分析中关于对标量自变量进行微分的熟知规则,就有

$$\mathbf{v}=-\frac{\ddot{\mathbf{A}}(t-r/c)\cdot\mathbf{n}}{cr}\nabla\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

再把 $\nabla\left(t-\frac{r}{c}\right)=-\frac{1}{c}\nabla r=-\frac{\mathbf{n}}{c}$,代入上式,最后得到

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{A}})}{c^2r}. \tag{73.12}$$

现在, 发射强度是与发射方向(即 $\mathbf{n}$ 方向)和矢量 $\ddot{\mathbf{A}}$ 之间夹角余弦的平方成正比; 这种发射称为**偶极发射**. 声发射总强度以积分

$$I=\frac{\rho}{c^3}\oint\frac{\overline{(\mathbf{n}\cdot\ddot{\mathbf{A}})^2}}{r^2}df$$

表示. 我们还是将积分曲面取作半径为 r 的球面, 并且采用以矢量 $\mathbf{A}$ 的方向作为极轴的球坐标系. 经过简单的积分,最后得出每单位时间内的声发射总强度为

$$I=\frac{4\pi\rho}{3c^3}\overline{\ddot{A}^2}.\tag{73.13}$$

矢量 A 的分量是物体速度 u 的分量的线性函数(参看 § 11)，因此，这里的强度是速度分量的二次时间导数的二次函数.

如果物体作频率为 ω 的谐振动，我们可推断出(理由如前所述)，在速度振幅值已知的情况下，强度与 ω^4成正比. 当给定物体振动的线振幅时，速度振幅正比于频率，因此，强度与 ω^6成正比.

用完全类似的方法，我们可以解柱面声波的发射问题，这种声发射，是由一个任意横截面的柱体作垂直于自身轴线的脉动或振动所产生的. 为了今后的应用，我们在这里列举相应的公式.

我们首先来研究圆柱体的小脉动，并设 $S=S(t)$ 是柱体的(可变)横截面积. 在离柱轴距离 r 处，r 满足条件 $l\ll r\ll\lambda$(l 是柱体的横向线尺度)，类似于(73.8)式可得

$$\phi=\left[\frac{\dot{S}(t)}{2\pi}\right]\ln fr\tag{73.14}$$

这里，$f(t)$是时间的某个函数，$\ln fr$ 的系数应妥为选取，务使得到的通过共轴柱面的质量通量之值是正确的. 根据出射柱面波的速度势公式[公式(70.2)的第一项]，现在可以推断出，在所有 $r\gg l$ 的距离上，速度势可以表示为

$$\phi=-\frac{c}{2\pi}\int_{-\infty}^{t-r/c}\frac{\dot{S}(t')dt'}{\sqrt{c^2(t-t')^2-r^2}}.\tag{73.15}$$

当 $r\to0$ 时，这一表达式的首项与(73.14)式相同，而(73.14)式中的函数 $f(t)$ 也就自动确定了[假设当 $t\to-\infty$时，导数 $\dot{S}(t)$很快趋于零]. 另一方面，r 值非常大时("声波区")，$t-t'\sim r/c$ 的那些值在积分(73.15)中起最重要的作用. 因此，在被积函数的分母中，我们可以设

$$(t-t')^2-\frac{r^2}{c^2}\approx\left(\frac{2r}{c}\right)\left(t-t'-\frac{r}{c}\right),$$

结果求得

$$\phi=-\frac{c}{2\pi\sqrt{2r}}\int_{-\infty}^{t-r/c}\frac{\dot{S}(t')dt'}{\sqrt{c(t-t')-r}}. \qquad (73.16)$$

最后，速度 $v=\partial\phi/\partial r$. 为了计算这个导数，最好把 $t-t'-r/c=\xi$ 代入上面积分式中:

$$\phi=-\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{2r}}\int_0^{\infty}\frac{\dot{S}(t-r/c-\xi)}{\sqrt{\xi}}d\xi;$$

这样，积分限就与 r 无关. 积分前面的因子$1/\sqrt{r}$用不着求微分，因为这将得出 $1/r$ 的高阶项. 在积分号下微分，然后再回到变量 t'，即得

$$v=\frac{1}{2\pi\sqrt{2r}}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{c}}\frac{\ddot{S}(t')dt'}{\sqrt{c(t-t')-r}}. \qquad (73.17)$$

发射强度由乘积 $2\pi r\rho c\overline{v^2}$ 来确定. 应当注意的是，与球面波的情况不同，这里，任何时刻的发射强度，要由函数 $S(t)$在从 $-\infty$ 到 $t-r/c$ 的全部时间内的变化而定.

最后，当无限长柱体沿着垂直于其轴线的某一方向作平移振动时，在 $l\ll r\ll\lambda$ 的距离 r 处，速度势的形式为

$$\phi=\nabla\cdot(\mathbf{A}\ln fr), \qquad (73.18)$$

这里的 $\mathbf{A}(t)$可由求解不可压缩流体中柱体绕流的拉普拉斯方程而得到. 因此，我们又可以推断出，在所有 $r\gg l$ 的距离上，应有

$$\phi=-\nabla\cdot\left(\int_{-\infty}^{t-r/c}\frac{\mathbf{A}(t')dt'}{\sqrt{(t-t')^2-r^2/c^2}}\right). \qquad (73.19)$$

最后，我们还必须作如下说明. 这里已经完全略去了流体的粘性效应，因而假设发射波中总是势流. 但是实际上，振动物体周围在厚度为$\sqrt{\nu/\omega}$的流体层里，并不是势流(参看 § 24). 因此，如果要使以上公式变得可用，就必须使这一层的厚度相对于物体的线度 l 小得多，即

$$\sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \ll l. \tag{73.20}$$

当频率很低或者物体线尺度很小时，这个条件不一定能满足.

问　　题

问题 1. 设有一个球以频率 ω 作(谐和)平移小振动，波长与球半径 R 大小相当，试求声发射的总强度.

解: 把球的速度写成 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0 e^{-i\omega t}$ 的形式，则 ϕ 也通过因子 $e^{-i\omega t}$ 依赖于时间，并且满足方程 $\Delta\phi+k^2\phi=0$，其中 $k=\omega/c$. 我们寻求形式为 $\phi=\boldsymbol{u}\cdot\nabla f(r)$ 的解，原点取在球心的瞬时位置上，就得到关于 f 的方程为 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\Delta f+k^2 f)=0$，由此有 $\Delta f+k^2 f=$常数. 撇开无关紧要的附加常数，我们就得到

$$f=Ae^{ikr}/r.$$

常数 A 可由以下条件求出:

$$\text{当 } r=R \text{ 时}, \partial\phi/\partial r=u_r.$$

其结果是

$$\phi=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}e^{ik(r-R)}\left(\frac{R}{r}\right)^3\frac{ikr-1}{2-2ikR-k^2R^2}.$$

这样，我们就得出了偶极发射. 在离开球相当远的距离处，与 ikr 相比，1 可以略去不计，于是，ϕ 取(73.11)的形式，其中矢量 $\dot{\boldsymbol{A}}$ 为

$$\dot{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{u}e^{ik(r-R)}R^3\frac{i\omega}{2-2ikR-k^2R^2}.$$

注意到 $\overline{(\mathbf{n}\ddot{\boldsymbol{A}})^2}=\frac{1}{2}\overline{|\ddot{\boldsymbol{A}}|^2}$，根据(73.13)式可得声发射总强度为

$$I=\frac{2\pi\rho}{3c^3}|\boldsymbol{u}_0|^2\frac{R^6\omega^4}{4+(\omega R/c)^4}.$$

当 $\omega R/c\ll 1$ 时，这个表达式变成 $I=\pi\rho R^6|\boldsymbol{u}_0|^2\omega^4/6c^6$，把 §11 的问题 1 中的表达式 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}R^3\boldsymbol{u}$ 直接代入(73.13)式，也可以得到这个结果. 当 $\omega R/c\gg 1$ 时，可得 $I=\frac{2}{3}\pi\rho cR^2|\boldsymbol{u}_0|^2$，此式与公式(73.4)相对应.

在整个球面上对压力 $(p'=-\rho(\dot{\phi}')_{r=R})$ 沿 $\boldsymbol{u}$ 方向的分量进行积分，可得到作用在球上的阻力

$$\boldsymbol{F}=\frac{4}{3}\pi\rho\omega R^3\boldsymbol{u}\frac{-k^3R^3+i(2+k^2R^2)}{4+k^4R^4};$$

关于复数阻力的意义，可参看§24末段.

问题 2. 若设上题中球半径R与$\sqrt{\nu/\omega}$大小相当，而$\lambda\gg R$，试求其解.

解： 如果物体的线尺度比$\sqrt{\nu/\omega}$小得多，研究发射波就必须从不可压缩粘性流体的运动方程出发，而不能用方程$\Delta\phi=0$. 对应于球绕流问题的方程的解，可由§24中问题5的公式(1)和公式(2)加以确定. (1)式中的第一项随r按指数律而减小，因而在远距离处，该项可略去不计. 第二项给出的速度为 $v=-b(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\nabla\frac{1}{r}$. 与(73.6)式对比，可知

$$\boldsymbol{A}=-b\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}R^3\left[1-\frac{3}{(i-1)\kappa}-\frac{3}{2i\kappa^2}\right]\boldsymbol{u},$$

其中$\kappa=R\sqrt{\omega/2\nu}$，即$\boldsymbol{A}$与理想流体情况下的相应表达式相差括号内这个因子. 结果得到

$$I=\frac{\pi\rho R^6\omega^4}{6c^3}\left(1+\frac{3}{\kappa}+\frac{9}{2\kappa^2}+\frac{9}{2\kappa^3}+\frac{9}{4\kappa^4}\right)|\boldsymbol{u}_0|^2.$$

当$\kappa\gg1$时，该式就变成问题1中得出的公式；而当$\kappa\ll1$时，则得到

$$I=3\pi\rho R^2\nu^2\omega^2|\boldsymbol{u}_0|^2/2c^3,$$

就是说，声发射总强度正比于频率的二次幂，而不是四次幂.

问题 3. 设一球作任意频率的(谐和)小振动，试求其声发射总强度.

解： 我们寻求形式为$\phi=\frac{au}{r}e^{ik(r-R)}$的解，$R$是球的平衡半径，然后由条件$\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)_{r=R}=u=u_0e^{-i\omega t}$定出常数$a$(这里$u$是球面上的点的径向速度)：

$$a=\frac{R^2}{ikR-1}.$$

总声强为

$$I=\frac{2\pi\rho c|u_0|^2k^2R^4}{1+k^2R^2}.$$

当$kR\ll1$时，$I=2\pi\rho\omega^2R^4|u_0|^2/c$，这与(73.10)式一致；而当$kR\gg1$时，$I=2\pi\rho cR^2|u_0|^2$，这却和(73.4)式一致.

问题 4. 设在球(半径为R)的表面上各点的径向速度是时间的任意函数$u(t)$，试求此球作小脉动时所发射的声波的性质.

解： 我们寻求这样形式的解：$\phi=\frac{f(t')}{r}$，其中$t'=t-(r-R)/c$，并且要从边界条件

$$当\ r=R\ 时, \quad \partial\phi/\partial r=u(t)$$

来确定 f. 这一条件给出方程 $\frac{df}{dt}+\frac{cf(t)}{R}=-Rcu(t)$. 解出这个线性方程,再在解式中以 t' 代换 t,就得到

$$\phi(r,t')=-\frac{cR}{r}e^{-ct'/R}\int_{-\infty}^{t'}u(\tau)e^{c\tau/R}d\tau. \tag{1}$$

如果球在某一时刻,比如说在 $t=0$ 时停止振动(即当 $\tau>0$ 时,$u(\tau)=0$), 那么,在时刻 $t=(r-R)/c$ 以后,离球心距离为 r 处的速度势的形式是: $\phi=$常数$\times e^{-ct/R}$,即 ϕ 随时间按指数规律衰减.

设 T 为速度 $u(t)$ 发生显著变化所需的时间. 如果 $T\gg R/c$, 即如果发射波的波长 $\lambda\sim cT\gg R$,那么,我们就可以把缓慢变化的因子 $u(\tau)$ 提到(1)式的积分号外,并代之以 $u(t')$. 这样, 在 $r\gg R$ 的距离上,求得 $\phi=-(R^2/r)u\times(t-r/c)$,这与公式(73.8)一致. 另一方面,如果 $T\ll R/c$, 用类似的方法可得到

$$\phi=-\frac{cR}{r}\int_{-\infty}^{t'}u(\tau)d\tau,\ v=\partial\phi/\partial r=\frac{R}{r}u(t'),$$

这也与公式(73.4)一致.

问题 5. 设半径为 R 的球, 在理想可压缩流体中作任意的平移运动, 并且速度远小于声速,试求流体的运动.

解: 我们寻求下列形式的解:

$$\phi=\nabla\cdot\left[\frac{f(t')}{r}\right], \tag{1}$$

其中 r 是离原点的距离,原点取在时刻 $t'=t-(r-R)/c$ 的球心位置上; 因为球的速度 u 远小于声速原点的移动可以忽略不计. 流体的速度为

$$v=\nabla\phi=\frac{3(f\cdot n)n-f}{r^3}+\frac{3(f'\cdot n)n-f'}{cr^2}+\frac{(f''\cdot n)n}{c^2r}, \tag{2}$$

这里 n 是 r 方向的单位矢量, 撇号表示 f 对自变量的导数. 边界条件为当 $r=R$ 时,$v_r=u\cdot n$,由此有

$$f''(t)+\frac{2c}{R}f'(t)+\frac{2c^2}{R^2}f(t)=Rc^2u(t).$$

应用参数变易法求解这个方程,可得函数 $f(t)$ 的一般表达式为

$$f(t)=cR^2e^{-ct/R}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\sin\frac{c(t-\tau)}{R}e^{c\tau/R}d\tau. \tag{3}$$

在代入(1)式时,必须用 t' 代换 t. 下限取作$-\infty$, 所以, $t=-\infty$时 ,f 将

为零.

问题 6. 半径为R的球在$t=0$时刻开始以不变速度u_0运动，试求运动开始那一瞬时的声发射总强度.

解: 在问题 5 的公式(3)中，令设当$\tau<0$时，$u(\tau)=0$；$\tau>0$时，$u(\tau)=u_0$. 然后代入公式(2)(仅保留最后一项，此项随r的增加而减小得最慢)，我们就求得远离球体处的流体速度:

$$v=-n(n\cdot u_0)\frac{\sqrt{2R}}{r}e^{-ct'/R}\sin\left(\frac{ct'}{R}-\frac{\pi}{4}\right),$$

这里$t'>0$. 声发射总强度按照下式表示的规律随时间衰减:

$$I=\frac{8}{3}\pi c\rho R^2u_0^2e^{-2ct'/R}\sin^2\left(\frac{ct'}{R}-\frac{\pi}{4}\right).$$

全部时间的总发射能为$\frac{1}{3}\pi\rho R^3u_0^2$.

问题 7. 设半径为R的无限长圆柱，以波长$\lambda\gg R$作谐和脉动，试确定声发射总强度.

解: 根据公式(73.14)，我们首先可求得在$r\ll\lambda$的距离上(在问题 7 和问题 8 中，r是离柱轴的距离)的速度势为$\phi=Ru\ln kr$ 其中$u=u_0e^{-i\omega t}$是柱面上点的速度. 把公式(70.7)和(70.8)加以对比，就得出远距离处速度势的形式为$\phi=-Ru\sqrt{\frac{i\pi}{2kr}}e^{ikr}$. 于是速度为

$$v=Ru\sqrt{\frac{\pi k}{2ir}}ne^{ikr},$$

这里n是垂直于柱轴的单位矢量. 每单位柱长的声发射强度为$I=\frac{1}{2}\pi^2\rho\omega R^2u_0^2$.

问题 8. 设圆柱在垂直于其轴线的方向上作谐和平移振动，试确定声发射总强度.

解: 在$r\ll\lambda$的距离处，$\phi=-\nabla\cdot(R^2\mathbf{u}\ln kr)$，

(参看公式(73.18)和 § 10 的问题 3). 因此，可以推断出在远距离处有

$$\phi=R^2\sqrt{\frac{i\pi}{2k}}\nabla\cdot\left(\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}u\right)=-R^2u\cdot n\sqrt{\frac{\pi k}{2ir}}e^{ikr},$$

由此得出速度为

$$v=-kR^2\sqrt{\frac{i\pi k}{2r}}\mathbf{n}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})e^{ikr}.$$

声强正比于振动方向和发射方向夹角余弦的平方，总强度为

$$I=\frac{\pi^2}{4c^2}\rho\omega^3R^4|u_0|^2.$$

问题 9. 设平板表面的温度以频率 $\omega\ll c^2/\chi$ 作周期变化，其中 χ 是流体的导温系数，试确定平板的声发射强度.

解: 设表面温度的可变部分是 $T_0'e^{-i\omega t}$. 温度振动在流体中产生一个以公式(52.17)表示的衰减的热波，即

$$T'=T_0'e^{-i\omega t}e^{-(1-i)\sqrt{\omega/2\chi}\,x}.$$

因此，流体的密度也产生振动: $\rho'=(\partial\rho/\partial T)_pT'=-\rho\beta T'$，其中 β 为热膨胀系数. 由此，又导致一个由下列连续方程确定的运动:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial\rho'}{\partial t}=-i\omega\rho\beta T'$$

在固壁上，速度 $v_x=v=0$；远离壁面处，则趋于极限

$$v=-i\omega\beta\int_0^\infty T'dx=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\beta\sqrt{\omega\chi}T_0'e^{-i\omega t}.$$

在大约 $\sqrt{\chi/\omega}$ 的距离处可达到这个值，与 c/ω 相比，该距离为小量. 这个值可作为所产生的声波的一个边界条件. 由此求得表面上每单位面积的声发射强度为 $I=\frac{1}{2}c\rho\beta^2\omega\chi|T_0'|^2$.

问题 10. 设一个发射球面波的点源离固壁的距离为 l，固壁一侧的半空间充满流体，而且固壁对声波是完全反射的. 试求在这种情况下，点源产生的声发射总强度与无限介质中同一点源产生的声发射总强度之比，并求离点源远距离处的声发射强度与方向的关系.

解: 直达波和反射波两者的组合，可由波动方程的某个解确定，这个解应使壁面上的法向速度分量 $u_n=\partial\phi/\partial n$ 为零. 此解为

$$\phi=\left(\frac{e^{ikr}}{r}+\frac{e^{ikr'}}{r'}\right)e^{-i\omega t}.$$

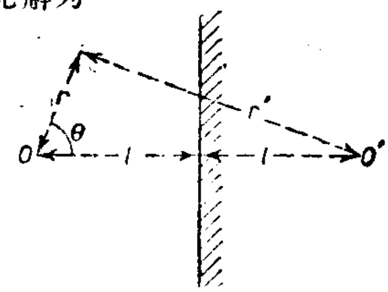


图 39

(为简单起见，这里未写出常数因子)，其中 r 是离点源 O 的距离(参看图39)，r' 是离点 O' 的距离，O' 是点 O 相对于壁面的映象. 在远离点源处，有 $r'\approx r-2l\cos\theta$，所以

$$\phi=\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}(1+e^{-2ikl\cos\theta}).$$

强度对方向的依赖关系则由因子 $\cos^2(kl\cos\theta)$ 确定.

为了求得总强度，我们沿半径为任意小且以点 O 为中心的球面，将能量通量[(参看(64.4)]：$\overline{q}=\overline{p'V}=-\overline{\rho\dot{\phi}\nabla\phi}$ 积分. 结果得到 $2\pi\rho k\omega[1+(1/2kl)\sin 2kl]$.

另一方面，在无限介质中应当只有一个球面波 $\phi=\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$，其总能量通量是 $2\pi\rho k\omega$. 于是，所需求的发射强度的比值是 $1+(1/2kl)\sin 2kl$.

问题 11. 若上题中流体界面为自由面，结果如何?

解: 在自由表面上，必然满足条件 $p'=-\rho\dot{\phi}=0$；在单色波中，这等价于 $\phi=0$. 它所对应的波动方程的解为

$$\phi=\left(\frac{e^{ikr}}{r}-\frac{e^{ikr'}}{r'}\right)e^{-i\omega t}.$$

在远离声源处，发射强度中有一个因子为 $\sin^2(kl\cos\theta)$，故所求的强度比为 $1-(1/2kl)\sin 2kl$.

§ 74. 互易原理

在 § 63 中推导声波方程时，曾经假设声波是在均匀介质中传播的. 特别是，把介质的密度 ρ_0 和其中的声速 c 看作常数. 为了得到对任意非均匀介质也适用的一般关系式，我们先来推导声音在这种介质中传播的方程式.

我们把连续方程写为下列形式:

$$d\rho/dt+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

因为声音传播是绝热过程，我们有

$$\frac{d\rho}{dt}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_s\frac{dp}{dt}=\frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla p\right),$$

从而连续方程变为

$$\partial p/\partial t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla p+\rho c^2\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

按通常办法，设 $\rho=\rho_0+\rho'$，这里的 ρ_0 现在是坐标的给定函数. 但是在等式 $p=p_0+p'$ 中，我们仍必须象以前那样，设 $p_0=$

常数，因为在整个平衡介质中，压力必须不变(当然是在没有外力场的情况下). 因此，准确到二阶量的方程为

$$\partial p'/\partial t+\rho_0 c^2\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

这个方程在形式上与方程(63.5)相同，但是系数 $\rho_0 c^2$ 是坐标的函数. 如同 § 63 那样，我们可得出欧拉方程的形式为

$$\partial\boldsymbol{v}/\partial t=-(1/\rho_0)\nabla p'.$$

消去 $\boldsymbol{v}$，再去掉 ρ_0 的下标，最后就得到声音在非均匀介质中的传播方程：

$$\nabla\cdot\left(\frac{\nabla p'}{\rho}\right)-\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}=0. \tag{74.1}$$

如果是频率为 ω 的单色波，则有 $\ddot{p}'=-\omega^2 p'$，从而

$$\nabla\cdot\left(\frac{\nabla p'}{\rho}\right)+\frac{\omega^2}{\rho c^2}p'=0. \tag{74.2}$$

现在来考察小尺度的脉动声源所发射的声波；在 § 73 中，我们已经知道这种发射是各向同性的. 我们把声源所在的点记作 A，把由 A 发出的声波中某一点 B 的压力 p' 记作 $p_A(B)$①. 如果把同样的声源置于 B 点，它在 A 点产生一个压力，记作 $p_B(A)$. 下面来推导 $p_A(B)$ 和 $p_B(A)$ 之间的关系.

为此，我们首先在声源 A 发射的声波中应用方程(74.2)，然后再把同一方程应用于声源 B 所发射的声波，即得

$$\nabla\cdot\left(\frac{\nabla p'_A}{\rho}\right)+\frac{\omega^2}{\rho c^2}p'_A=0,\quad \nabla\cdot\left(\frac{\nabla p'_B}{\rho}\right)+\frac{\omega^2}{\rho c^2}p'_B=0.$$

将第一个方程乘以 p'_B，第二个方程乘以 p'_A，然后两式相减，结果为

$$p'_B\nabla\cdot\left(\frac{\nabla p'_A}{\rho}\right)-p'_A\nabla\cdot\left(\frac{\nabla p'_B}{\rho}\right)=\nabla\cdot\left(\frac{p'_B\nabla p'_A}{\rho}-\frac{p'_A\nabla p'_B}{\rho}\right)=0$$

我们在无限远的封闭曲面 C 和两个小球面 C_A、C_B 之间的体积上

① 声源的线尺度必须远小于 A、B 两点之间的距离和波长.

积分这个方程，其中 C_A 和 C_B 分别包围点 A 和点 B. 这个体积分又可以变换为三个面积分，又因为声场在无穷远处消失，故曲面 C 上的积分为零. 于是，我们得到

$$\oint_{C_A+C_B}\left(p'_B\frac{\nabla p'_A}{\rho}-p'_A\frac{\nabla p'_B}{\rho}\right)\cdot d\boldsymbol{f}=0. \tag{74.3}$$

在小球面 C_A 内，声源 A 发射的声波的压力 p'_A 随着离开 A 点距离的增大而迅速减小，因此梯度 $\nabla p'_A$ 的值很大. 而在与 B 点有相当大距离的 A 点附近的区域内，声源 B 的声发射所产生的压力 p'_B 则是坐标的缓变函数，这样，梯度 $\nabla p'_B$ 相对说来就很小. 所以，当球面 C_A 的半径充分小时，沿整个球面 C_A 的积分

$$\oint\left(\frac{p'_A}{\rho}\right)\nabla p'_B\cdot d\boldsymbol{f}$$

与积分

$$\oint\left(\frac{p'_B}{\rho}\right)\nabla p'_A\cdot d\boldsymbol{f}$$

相比可忽略不计. 在后一个积分中，p'_B 几乎为一恒值，我们可以把它移到积分号外，且代之以它在 A 点的值. 对球面 C_B 上的积分也可以作类似的推理，结果由(74.3)得到下面的关系式：

$$p'_B(A)\oint_{C_A}\frac{\nabla p'_A}{\rho}\cdot d\boldsymbol{f}=p'_A(B)\oint_{C_B}\frac{\nabla p'_B}{\rho}\cdot d\boldsymbol{f}.$$

但是 $(1/\rho)\nabla p'=-\partial\boldsymbol{v}/\partial t$，因此，这一方程又可改写为

$$p'_B(A)\frac{\partial}{\partial t}\oint_{C_A}\boldsymbol{v}_A\cdot d\boldsymbol{f}=p'_A(B)\frac{\partial}{\partial t}\oint_{C_B}\boldsymbol{v}_B\cdot d\boldsymbol{f}.$$

沿 C_A 的积分

$$\oint\boldsymbol{v}_A\cdot d\boldsymbol{f}$$

是每单位时间内流过球面 C_A 的流体体积，也就是说，它是脉动声源的体积变化率. 由于点 A 和点 B 的声源是完全相同的，显然

应有

$$\oint_{C_A} \boldsymbol{v}_A \cdot d\boldsymbol{f} = \oint_{C_B} \boldsymbol{v}_B \cdot d\boldsymbol{f},$$

因此

$$p'_A(B) = p'_B(A). \tag{74.4}$$

这一方程就构成了所谓**互易原理**：位于A点的声源在B点所产生的压力等于位于B点的同样声源在A点所产生的压力．尤其应当强调的是，这一结果也适用于下述情形，即介质为几个不同的均匀区域所组成，而当声波在这种介质中传播时，它在各个区域的分界面上要发生反射和折射．于是，在声波从A点到B点(以及从B点到A点)的路程中发生反射和折射的情况下，互易原理也是成立的．

问　题

设声源振动而无体积变化，试导出这种偶极声发射的互易原理．

解：在现在的情况下，沿C_A的积分

$$\oint \boldsymbol{v}_A \cdot d\boldsymbol{f}$$

恒等于零，因而在计算(74.3)式中的积分时，必须取次一阶的近似．为此，我们写到一阶项，即有

$$p'_B = p'_B(A) + \boldsymbol{r} \cdot \nabla p'_B,$$

其中$\boldsymbol{r}$是从A点引出的矢径．在积分

$$\oint_{C_A} \left(p'_B \frac{\nabla p'_A}{\rho} - p'_A \frac{\nabla p'_B}{\rho} \right) \cdot d\boldsymbol{f} \tag{1}$$

中，这两项现属同一量级．将上面关于p'_B的展开式代入此式，并注意到在目前的情况下，沿C_A的积分

$$\oint \frac{1}{\rho} \nabla p'_A \cdot d\boldsymbol{f}$$

等于零，于是我们得到

$$\oint_{C_A}\left\{(\boldsymbol{r}\cdot\nabla p'_B)\frac{\nabla p'_A}{\rho}-p'_A\frac{\nabla p'_B}{\rho}\right\}\cdot d\boldsymbol{f}.$$

其次，我们将几乎不变的量 $\nabla p'_B=-\rho\dot{\boldsymbol{v}}_B$ 移到积分号外，并以它在 A 点的值代入，即得

$$\rho_A\dot{\boldsymbol{v}}_B(A)\cdot\oint_{C_A}\left\{\frac{p'_A}{\rho}d\boldsymbol{f}-\boldsymbol{r}\left(\frac{\nabla p'_A}{\rho}\cdot d\boldsymbol{f}\right)\right\},$$

其中 ρ_A 是 A 点的介质密度. 为了计算这个积分，我们注意到，在声源附近，流体可以看成是不可压缩的(参看 § 73)，因此，利用(11.1)式，可以把小球 C_A 内的压力写成 $p'_A=-\rho\dot{\phi}=\rho\,\dot{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{r}/r^3$. 在单色波中，$\dot{\boldsymbol{v}}=-i\omega\boldsymbol{v}$, $\dot{\boldsymbol{A}}=-i\omega\boldsymbol{A}$; 再引用一个单位矢量 $\boldsymbol{n}_A$，它的方向是声源 A 的矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向，我们就知道积分(1)正比于 $\rho_A\boldsymbol{v}_B(A)\cdot\boldsymbol{n}_A$. 以类似方法，可知球面 C_B 上的积分正比于 $-\rho_B\boldsymbol{v}(B)\cdot\boldsymbol{n}_B$，且具有相同的比例系数. 令二者之和等于零，就求得我们所需的关系式

$$\rho_A\boldsymbol{v}_B(A)\cdot\boldsymbol{n}_A=\rho_B\boldsymbol{v}_A(B)\cdot\boldsymbol{n}_B,$$

上式即表示偶极声发射的互易原理.

§ 75. 声音在导管中的传播

现在来研究声音在细长导管中的传播. 所谓"细"管，是指它的宽度比波长小得多. 沿着管子长度的方向，管截面的形状和面积都是可以变化的. 但重要的是，这种变化应当相当缓慢，就是说，当通过导管宽度量级的距离时，截面积 S 应只有微小的变化.

在这些条件下，我们可以假设在此管的任何一个横截面上所有的量(速度、密度等)都保持不变. 所有点上的波的传播方向，都可以认为与管轴的方向一致. 推导描述这种波传播的方程，最好采用类似于 § 13 中用以推导水渠中重力波的传播方程的方法.

在单位时间内，通过管截面的流体质量是 $S\rho v$. 因此，在导管内相距为 dx 的两个横截面之间的体积中，单位时间内减小的流体质量为

$$(S\rho v)_{x+dx}-(S\rho v)_x=\left[\frac{\partial}{\partial x}(S\rho v)\right]dx,$$

其中坐标 x 须沿管轴方向计量. 因为两截面之间的体积保持不变，这种减少一定是由流体密度变化所引起的. 而每单位时间的密度变化是 $\partial\rho/\partial t$，所以，在两个截面之间的体积 Sdx 中，流体的质量相应地减少了 $-S(\partial\rho/\partial t)dx$. 使这两个表达式相等，即得

$$S\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(S\rho v), \tag{75.1}$$

上式就是管道内流动的"连续方程".

其次，我们写出欧拉方程，并略去其中的速度二次项:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{75.2}$$

将方程(75.1)对时间取导数，此时右边的密度 ρ 可视为与时间无关，因为 ρ 的导数含有 $v\partial\rho/\partial t=v\partial\rho'/\partial t$ 的项，所以是二阶小项. 于是就有 $S\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(S\rho\frac{\partial v}{\partial t}\right)$. 将(75.2)式中的$\frac{\partial v}{\partial t}$代入上式，再利用关系式 $\dot{\rho}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)\dot{p}=\frac{\dot{p}}{c^2}$，把方程左边的密度导数用压力导数来表示. 结果得到声音在导管中传播的方程式如下:

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0. \tag{75.3}$$

在单色波中，p 通过因子 $e^{-i\omega t}$ 依赖于时间，则(75.3)变为

$$\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right)+k^2p=0. \tag{75.4}$$

式中 $k=\omega/c$ 是波数①.

最后，我们来考虑声音从管子开口端发射的问题. 管端气体与其周围气体的压力差远小于管内的压力差，因此，取管端的边界条件为压力 p 等于零是足够准确的. 管端的气体速度 v 不为零；设其值为 v_0. 乘积 Sv_0 就是每单位时间内从导管流出的气体的

---

① 此处以及本节的问题中，p 表示压力的可变部分，以前它是用 p' 表示的.

体积.

现在我们可以将管的开口端看作强度为 Sv_0 的气体"源". 这样，管口发射问题就等价于公式(73.10)所解决的脉动物体的发射问题. 这里，我们要用 Sv_0 代替物体体积对时间的导数 $\dot{V}$，于是，声发射总强度为

$$I=\rho S^2\overline{\dot{v}_0^2}/4\pi c. \tag{75.5}$$

问　　题

问题 1. 设声音由截面积为 S_1 的管道进入截面积为 S_2 的管道，试确定其传递系数.

解: 第一个管道中有两个波: 入射波 $p_1=a_1e^{i(kx-\omega t)}$和反射波 $p_1'=a_1'e^{-i(kx+\omega t)}$. 第二管道中有透射波 $p_2=a_2e^{i(kx-\omega t)}$. 在两个管道的连接点($x=0$)上，压力必定相等，每单位时间内由一根管道进入另一根管道的气体体积 Sv 也必定相等. 这些条件给出了 $a_1+a_1'=a_2$, $S_1(a_1-a_1')=S_2a_2$, 由此有 $a_2=2a_1S_1/(S_1+S_2)$. 透射波与入射波中能量通量的比值 D 为

$$D=\frac{S_2\rho c\overline{|v_2|^2}}{S_1\rho c\overline{|v_1|^2}}=\frac{S_2\overline{|v_2|^2}}{S_1\overline{|v_1|^2}},$$

或者

$$D=\frac{4S_1S_2}{(S_1+S_2)^2}=1-\left(\frac{S_2-S_1}{S_2+S_1}\right)^2.$$

问题 2. 试确定从柱形管道开口端发射的声能值.

解: 管道开口端的边界条件是 $p=0$，我们可以近似地略去其中发射波的压力(我们将知道，管端的发射强度是很小的)，于是，就得到边界条件 $p_1=-p_1'$，其中 p_1 和 p_1' 分别是入射波和返回管道的反射波的压力. 关于速度，相应地有 $v_1=v_1'$，从而管端处的合速度为 $v_0=v_1+v_1'=2v_1$. 入射波中的能量通量是 $cS\rho\overline{v_1^2}=\frac{1}{4}cS\rho\overline{v_0^2}$. 利用(75.5)式，可得发射能和入射波能量通量的比值为 $D=\frac{S\omega^2}{\pi c^2}$. 若是(半径为 R 的)圆截面的管道，则得 $D=R^2\omega^2/c^2$. 既然按假设有 $R\ll c/\omega$，由此可知 $D\ll1$.

问题 3. 设柱形管的一端用薄膜蒙上，薄膜以给定的频率振动并发射声

波;另一端开口. 试确定声音从管道发射的规律.

解: 在通解

$$p=(ae^{ikx}+be^{-ikx})e^{-i\omega t}$$

中,我们利用下列边界条件来确定常数 a 和 b:

在封闭端 $(x=0)$, $\quad v=u=u_0e^{-i\omega t}$,

在开口端 $(x=l)$, $\quad p=0$,

其中 u 是给定的薄膜速度. 这些条件给出 $ae^{ikl}+be^{-ikl}=0, a-b=c\rho u_0$. 定出 a 和 b 后, 可求得管道开口端的气体速度为 $v_0=u/\cos kl$. 如果管子不存在,振动薄膜发射的声强将按公式(73.10)由均方值

$$S^2\overline{|\dot{u}|^2}=S^2\omega^2\overline{|u|^2}$$

确定,公式中以 Su 代替 $\dot{V}$, S 是薄膜的面积. 管端的发射正比于 $S^2\overline{|v_0|^2}\omega^2$. 兹定义管道的"声放大系数"为

$$A=S^2\overline{|v_0|^2}/S^2\overline{|u|^2},$$

就得到

$$A=\frac{1}{\cos^2 kl}.$$

当薄膜的振动频率等于管道的本征频率(共振)时,A 值就变成了无限大. 当然,它实际上仍是一个有限值,因为此时某些已被忽略的因素(例如, 声发射引起的内摩擦)将起作用.

问题 4. 设上题中为锥形管, 薄膜蒙在小截面一端,试求其解.

解: 管截面面积为 $S=S_0x^2$; 设对应于较小和较大管端的坐标值为 x_1, x_2, 则管长为 $l=x_2-x_1$. 方程(75.4)的通解为 $p=\frac{1}{x}(ae^{ikx}+be^{-ikx})e^{-i\omega t}$; a 和 b 可由下列边界条件确定:

$$x=x_1, v=u \text{ 和 } x=x_2, p=0.$$

于是求得放大系数为

$$A=\frac{S_0x_2^2\overline{|v_2|^2}}{S_0x_1^2\overline{|u|^2}}=\frac{k_1^2x_1^2}{(\sin kl+kx_1\cos kl)^2}.$$

问题 5. 若问题 3 中管子的截面积沿其长度方向按指数律 $S=S_0e^{\alpha x}$变化,试求其解.

解: 方程(75.4)变为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial p}{\partial x}+k^2p=0,$$

由此有

$$p=e^{-\frac{1}{2}\alpha x}(ae^{imx}+be^{-imx})e^{-i\omega t},$$

其中$m=\sqrt{k^2-\alpha^2/4}$. 由条件

$$x=0\text{ 时}, v=u \quad \text{和} \quad x=l\text{ 时}, p=0$$

确定出a和b. 我们求得当$k>\frac{\alpha}{2}$时的放大系数为

$$A=\frac{S_0e^{\alpha l}|v_0|^2}{S_0|u|^2}=\frac{e^{\alpha l}}{\left[\frac{1}{2}(\alpha/m)\sin ml+\cos ml\right]^2},$$

当$k<\frac{\alpha}{2}$时，则有

$$A=\frac{e^{\alpha l}}{\left[\frac{1}{2}(\alpha/m')\operatorname{sh}m'l+\operatorname{ch}m'l\right]^2}, \quad m'=\sqrt{\frac{1}{4}\alpha^2-k^2}.$$

§ 76. 声音散射

如果在声波的传播路径中存在着某个物体，声音就会发生散射，即除入射波外，还会出现另一个(散射)波，它从散射物体出发，向各个方向传播. 单是因为传播路径上存在物体，就可以产生声波散射；此外，入射波还会引起物体本身的运动，这就进一步带来了物体的附加声发射，即又一种散射. 但是，如果物体的密度比声音传播介质的密度大得多，且其压缩性很小，则物体运动产生的散射，只不过是对因物体的存在而产生的主要散射的一种小修正. 下面，我们将不计及这种修正，所以假定散射物体是静止的.

我们假设声音的波长λ比物体的线尺度l大得多；那么，在计算散射波的某些特征量时， 就可以应用公式(73.8)和(73.11)①. 此时，我们可以将散射波看成是由物体发射的；差别仅在于，现在不是物体在流体中运动，而是流体相对于物体运动. 这两个问题显

① 同时，物体的线尺度又必须比波中流体质点的位移振幅大得多，否则，一般来说流动将不是势流.

然是等价的.

我们曾经得出过发射波速度势的表达式: $\phi=-\frac{\dot V}{4\pi r}-\frac{\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{r}}{cr^2}$.
在该式中,V 是物体的体积. 但是,在目前情况下, 物体体积本身是保持不变的,因此,$\dot V$ 不应理解为物体体积的变化率,而应理解为假设物体不存在时, 每单位时间内进入它所占有的那块体积 V_0 的流体体积. 因为当有物体存在时, 这一体积的流体就不能穿过表面而进入 V_0 了,这就等价于有同样体积的流体从 V_0 中发射出来. 从 §73 中可知,ϕ 的第一项中的系数 $1/4\pi r$ 恰好是每单位时间内从原点发射的流体体积. 这个体积是容易求得的. 在与物体体积相等的容积中,每单位时间内流体质量的变化是 $V_0\dot\rho$,其中 $\dot\rho$ 代表入射声波中流体密度的变化率(因为波长比物体线尺度大得多,在相当于这个尺度量级的距离上,密度可以认为是不变的;因此, 我们可以将 V_0 中流体质量的变化率就写为 $V_0\dot\rho$,其中 $\dot\rho$ 在整个体积 V_0 中为同一值). 与质量变化 $V_0\dot\rho$ 相对应的体积变化显然是 $V_0\dot\rho/\rho$. 因此, 在 ϕ 的表达式中的 $\dot V$ 必须代以 $V_0\dot\rho/\rho$. 在平面入射波中,密度的可变部分 ρ' 与速度的关系是 $\rho'=\rho v/c$, 因此 $\dot\rho=\dot\rho'=\rho\dot v/c$,于是 $V_0\dot\rho/\rho$ 可用 $V_0\dot v/c$ 代换.

当物体在流体中运动时,矢量 $\mathbf{A}$ 由公式(11.5),(11.6)确定,即 $4\pi\rho A_i=m_{ik}u_k+\rho V_0u_i$. 现在必须用流体速度 $\mathbf{v}$ 加上负号来代替物体的速度 $\mathbf{u}$,这里的 $\mathbf{v}$ 是指假若物体不存在时,入射波中物体位置上的流体速度. 于是

$$A_i=-\frac{m_{ik}v_k}{4\pi\rho}-\frac{V_0v_i}{4\pi}. \tag{76.1}$$

最后,我们得到散射波的速度势:

$$\phi_{sc}=-\frac{V_0\dot v}{4\pi cr}-\frac{\dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{r}}{cr^2}, \tag{76.2}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 由公式(76.1)确定. 由此,可求得散射波中的速度分布为

$$\boldsymbol{v}_{sc}=\frac{V_0\dot{v}\boldsymbol{n}}{4\pi rc^2}+\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{A}})}{rc^2} \tag{76.3}$$

(参看 §73),$\boldsymbol{n}$ 为散射方向的单位矢量.

每单位时间内散射到给定立体角元 do 中的能量平均值由能量通量确定,其值为 $c\rho\overline{\boldsymbol{v}_{sc}^2}r^2do$. 对所有方向积分这个表达式,就得到总散射强度 I_{sc}. (76.3)中两项相乘积的二倍的积分为零,因为该乘积正比于散射方向和入射波传播方向夹角的余弦. 于是,积分后就剩下(参看(73.10)和(73.13)):

$$I_{sc}=\frac{V_0^2\rho}{4\pi c^3}\overline{\ddot{v}^2}+\frac{4\pi\rho}{3c^3}\overline{\ddot{\boldsymbol{A}}^2} \tag{76.4}$$

通常,散射用所谓**有效截面** $d\sigma$ 来表征,它是散射到一个给定立体角元中的(时间)平均能量与入射波能量通量的平均密度之比. **总有效截面**则是 $d\sigma$ 沿所有散射方向的积分,即它是总散射强度与入射能量通量密度之比,因而显然具有面积的量纲.

入射波能量通量的平均密度是 $c\rho\overline{\boldsymbol{v}^2}$. 因此,微分有效散射截面为 $(c\rho\overline{\boldsymbol{v}_{sc}^2}/c\rho\overline{v^2})r^2do$,即

$$d\sigma=(\overline{\boldsymbol{v}_{sc}^2}/\overline{\boldsymbol{v}^2})r^2do. \tag{76.5}$$

总有效截面为

$$\sigma=\frac{V_0^2}{4\pi c^4}\frac{\overline{\ddot{\boldsymbol{v}}^2}}{\overline{\boldsymbol{v}^2}}+\frac{4\pi}{3c^4}\frac{\overline{\ddot{\boldsymbol{A}}^2}}{\overline{\boldsymbol{v}^2}}. \tag{76.6}$$

若是单色入射波,速度对于时间的二阶导数的均方值正比于频率的四次幂. 因此,对于线尺度比波长小得多的物体来说,它对声波散射的有效截面正比于 ω^4.

最后,我们简单讨论一下相反的极限情况,即散射声波的波长远小于物体尺度. 在这种情况下,除了很小角度的散射以外,所有的散射都相当于从物体表面上的简单反射. 这部分散射所对应的

总有效截面，显然应等于用一个垂直于入射波方向的平面截取该物体而得到的截面积 S. 但是，通过(量级为 λ/c 的)小角的散射，则构成物体边缘的**衍射**. 这里，我们暂不详细说明描述这种现象的理论，它完全类似于光的衍射①. 我们仅仅指出，按照巴俾涅原理，声衍射的总强度等于声反射的总强度. 于是，有效散射截面的衍射部分也等于 S，因此，总截面为 $2S$.

问　　题

问题 1. 平面声波被半径为 R 的固体球所散射，假设 R 远小于波长，试求有效散射截面.

解: 平面波中给定点上的速度是 $v=a\cos\omega t$. 对于球来说(参看 § 11之问题 1)，矢量 $\boldsymbol{A}$ 为 $-\frac{1}{2}R^3\boldsymbol{v}$. 我们求得微分有效截面为

$$d\sigma=\frac{\omega^4R^6}{9c^4}\left(1-\frac{3}{2}\cos\theta\right)^2do,$$

其中 θ 是入射波方向与散射方向之间的夹角. 在 $\theta=\pi$ 的方向，即在入射方向的反方向上，散射强度最大. 总有效截面为

$$\sigma=\frac{7\pi}{9}\left(\frac{R^3\omega^2}{c^2}\right)^2.$$

这里(以及下面的问题 3 和 4 中)是假设球的密度 ρ_0 远大于气体密度 ρ; 不然的话，就需要考虑由振动的气体作用在小球上的压力所引起的小球的运动.

问题 2. 试确定声音被流滴所散射时的有效散射截面，解题时要考虑流体的压缩性和入射波引起的小滴运动.

解: 当小滴周围的气体压力绝热地变化一个 p' 值时，小滴的体积减小了 $(V_0/\rho_0)(\partial\rho_0/\partial p)_s p'$，其中 ρ_0 是小滴的密度. 但 $(\partial p/\partial\rho_0)_s$ 是流体中声速 c_0 的平方，而平面波中压力变化和速度的关系是 $p'=vc\rho$，这里 ρ 是气体的密度. 因此，每单位时间内小滴体积的减小为 $V_0\dot{v}c\rho/c_0^2\rho_0$. 在表达式(76.2)

① 参看 *The Classical Theory of Fields*, §7-7 至 § 7-9(中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹著，《场论》，任朗、袁炳南译，人民教育出版社，1959).

和(76.3)中，现在必须用差值$V_0(v/c-vc\rho/c_0^2\rho_0)$来代替$V_0v/c$. 此外，在$A$的表达式中，我们必须以差值$u-v$代替$-v$，其中$u$是小滴因入射波的作用而得到的速度. 对于球体来说，利用§11问题1中的结果，则有$A=R^3v(\rho-\rho_0)/(2\rho_0+\rho)$.

把这些表达式代入，就得出有效截面为

$$d\sigma=\frac{\omega^4R^6}{9c^4}\left\{\left(1-\frac{c^2\rho}{c_0^2\rho_0}\right)-3\cos\theta\frac{\rho_0-\rho}{2\rho_0+\rho}\right\}^2do.$$

总有效截面为

$$\sigma=\frac{4\pi\omega^4R^6}{9c^4}\left\{\left(1-\frac{c^2\rho}{c_0^2\rho_0}\right)^2+\frac{3(\rho_0-\rho)^2}{(2\rho_0+\rho)^2}\right\}.$$

问题3. 设有一半径R远小于$\sqrt{\nu/\omega}$的固体球，其比热很大，使得温度可以看作常数. 试求该球的声散射有效截面.

解： 在这种情况下，我们必须考虑气体粘性对小球运动的影响，矢量A必须修改为§73问题2中所表示的那种形式，当$R\sqrt{\omega/\nu}\ll1$时，我们有$A=-3iR\nu v/2\omega$.

气体的导热性也引起同样量级的散射. 设$T_0'e^{-i\omega t}$为声波中某一给定点上的温度变化. 在球附近的温度分布为(参看§52问题2)

$$T'=T_0'e^{-i\omega t}[1-(R/r)e^{-(1-i)(r-R)\sqrt{\omega/2\chi}}]$$

(当$r=R$时，必须满足$T'=0$). 当$R\sqrt{\omega/\chi}\ll1$时，每单位时间内由气体传递给小球的热量为

$$q=4\pi R^2\kappa\left(\frac{dT'}{dr}\right)_{r=R}=4\pi R\kappa T_0'e^{-i\omega t}.$$

这一热传递引起气体体积的变化，它对散射的影响就如同球体体积发生了一个相应的有效变化，其值为$\dot V=-4\pi R\chi\beta T_0'e^{-i\omega t}=-4\pi R\chi(\gamma-1)v/c$，其中，$\beta$是气体的热膨胀系数，$\gamma=c_p/c_v$；这里也利用了公式(63.13)和(77.2).

考虑这两种效应，我们求得微分有效散射截面为

$$d\sigma=\left(\frac{\omega R}{c^2}\right)^2\left[\chi(\gamma-1)-\frac{3}{2}\nu\cos\theta\right]^2do.$$

总有效截面为

$$\sigma=4\pi\left(\frac{\omega R}{c^2}\right)^2\left[\chi^2(\gamma-1)^2+\frac{3}{4}\nu^2\right].$$

这些公式，只有当斯托克斯摩擦力远小于惯性力时，即$\eta R\ll M\omega$时才成立，其中$M=4\pi R^3\rho_0/3$为球的质量；否则，由粘性力作用所引起的球的运动就

变得重要了.

问题 4. 设一固体球散射平面声波($\lambda \gg R$)，试求此球所受到的平均作用力.

解: 每单位时间内由入射波传递给球的动量(即待求的力)，就是入射波动量和散射波的总动量通量之差. 从入射波中散射掉的能量通量为 $\sigma c\bar{E}_0$，其中 E_0 为入射波的能量密度;除以 c，即得对应的动量通量 $\sigma\bar{E}_0$. 在散射波中,散射到立体角元 do 中的动量通量为 $\bar{E}_{sc}r^2do=\bar{E}_0d\sigma$；将它投影到入射波的传播方向上(显然,这正是待求力的方向)，并对所有的立体角积分，就得到

$$\bar{E}_0\int\cos\theta d\sigma.$$

因此，作用在球上的力为

$$F=\bar{E}_0\int(1-\cos\theta)d\sigma.$$

将问题 1 中的 $d\sigma$ 代入后，得到

$$F=11\pi\omega^4R^6\bar{E}_0/9c^4.$$

§ 77. 声音的吸收

由于存在粘性和导热性，就要导致声音能量的耗散. 因此，声音将被吸收，即声音的强度将逐渐减弱. 为了计算能量耗散率 $\dot{E}_{机}$，我们要用到下面的一般推理. 机械能乃是由给定的非平衡状态转变到某个热力学平衡态所能实现的最大功. 由热力学可知①，如果这个转变是可逆过程(即熵不发生改变)，就得到最大功，于是有 $E_{机}=E_0-E(S)$，其中 E_0 是给定的能量初始值，$E(S)$ 为某个平衡态的能量，该平衡态的熵 S 与系统熵的初始值相同. 对时间取微商后即得 $\dot{E}_{机}=-\dot{E}(S)=-\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)\dot{S}$. 能量对熵的导数为温度，因此，$\partial E/\partial S$ 就是假定系统处于热力学平衡态(且具有给定的熵值)时所应具有的温度. 将此温度记为 T_0，就得出 $\dot{E}_{机}=-T_0\dot{S}$.

---

① 例如，参看 *Statistical Physics*，§ 19(中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹著，《统计物理学》，杨训恺等译，人民教育出版社，1964).

我们应用 $\dot{S}$ 的表达式(49.6)，它给出导热和粘性两者所引起的熵变化率. 因为在整个流体中温度 T 只有微小的变化，而且和 T_0 没有多大差别，所以可把 T 移到积分号外，并且可以把 T_0 写为 T，即

$$\dot{E}_{机}=-\frac{\kappa}{T}\int(\nabla T)^2 dV-\frac{1}{2}\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV$$
$$-\zeta\int(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2 dV. \tag{77.1}$$

这一公式把公式(16.3)推广到了导热的可压缩流体的情形.

设 x 轴为声波的传播方向，则有 $v_x=v_0\cos(kx-\omega t)$，$v_y=v_z=0$. 由(77.1)式的后两项，得到

$$-\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\int\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dV=-k^2\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)v_0^2\int\sin^2(kx-\omega t)dV.$$

当然，我们关心的只是时间平均值，取时间平均后得到

$$-k^2\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\cdot\frac{1}{2}v_0^2 V_0 (V_0\text{ 是流体的体积})$$

其次，我们来计算(77.1)式的第一项. 声波中，温度对其平衡值的偏离 T' 和速度的关系由公式(63.13)表示，因此，温度梯度为

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\beta cT}{c_p}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\beta cT}{c_p}v_0 k\sin(kx-\omega t).$$

取(77.1) 式中第一项的时间平均值，我们得到 $-\kappa c^2 T\beta^2 v_0^2 k^2 V_0/2c_p^2$. 利用熟知的热力学公式

$$c_p-c_v=T\beta^2\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T=T\beta^2\left(\frac{c_v}{c_p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S=T\beta^2c^2c_v/c_p, \tag{77.2}$$

可以将上面的表达式改写为

$$-\frac{1}{2}\kappa\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)k^2v_0^2V_0.$$

综合以上结果，我们求得能量耗散的平均值为

$$\dot{E}_{机}=-\frac{1}{2}k^2v_0^2V_0\left[\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)+\kappa\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\right]. \tag{77.3}$$

而声波的总能量为

$$\bar{E}=\frac{1}{2}\rho v_0^2V_0. \tag{77.4}$$

在 § 25 中所导出的阻尼系数表示出重力波的强度随时间衰减的规律. 但是,对于声波来说,问题的提法通常有所不同:声波在流体中传播,其强度随着所通过的距离增大而衰减. 显然,这种衰减将按照 $e^{-2\gamma x}$ 的规律进行,而振幅则按 $e^{-\gamma x}$ 衰减,其中的**吸收系数** γ 定义为

$$\gamma=|\dot{E}_{机}|/2c\bar{E}. \tag{77.5}$$

将(77.3)和(77.4)代入此式,我们求得声音吸收系数的下列表达式:

$$\gamma=\frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left[\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)+\kappa\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\right]. \tag{77.6}$$

我们可以指出,吸收系数正比于声音频率的平方①.

只要上式确定的吸收系数值很小,这一公式就可应用,就是说,它要求在相当于波长数量级的距离上,振幅的减小必须是相当小的(即满足 $\gamma c/\omega\ll1$). 实质上,以上的推导正是基于这一假设,因为我们已经用不衰减的声波表达式来计算能量耗散. 对于气体来说,这一条件实际上总是满足的. 例如,我们可以考察(77.6)式的第一项. 条件 $\gamma c/\omega\ll1$ 意味着 $\nu\omega/c^2\ll1$. 但是,由气体分子运动论可知,气体的粘性系数 ν 是和分子平均自由程 l 与分子平均热速度的乘积同一量级的;而后者又和气体中的声速属同一量级,从而有 $\nu\sim lc$. 因为我们已知 $l\ll\lambda$,于是得到

$$\nu\omega/c^2\sim l\omega/c\sim l/\lambda\ll1. \tag{77.7}$$

---

① M. A. 伊萨柯维奇(Исакович)曾指出:当声音在一种二相系(乳溶系)中传播时,一定存在某种特殊的吸收. 由于两种成分的热力学性质不同,在声波通过期间,它们的温度变化一般也不相同. 由此产生的两种成分之间的热交换引起一种附加的声吸收. 由于这种热交换比较缓慢,很快就发生了显著的声频散. 详细计算参阅 M. A. 伊萨柯维奇,Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, **18**, 907, 1948.

又因为$\chi \sim \nu$，由(77.6)中的导热项也可引出同样结果.

在液体中，当上述声吸收问题具有重要意义时，吸收系数小的条件总是得到满足的. 只有当粘性力和物质受压缩时所产生的压力两者大小相当时，在一个波长距离上的声吸收才会变大. 但是，在这种情况下，(粘性系数与频率无关的)纳维-斯托克斯方程也变得不成立了，此时会产生由于内摩擦过程而引起的显著声频散.①

当有声吸收时，波数和频率的关系显然可以写为

$$k=\omega/c+ia\omega^2, \tag{77.8}$$

其中a表示吸收系数$\gamma=a\omega^2$中ω^2的系数. 不难看出，当考虑吸收作用时，行进声波的方程必须作怎样的修正. 为此，我们指出，当不存在吸收时，比方说，压力$p'=p'(x-ct)$的微分方程可以写成$\frac{\partial p'}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial p'}{\partial t}$. 显然，解为$e^{i(kx-\omega t)}$而且$k$值由(77.8)式给出的那个方程一定是

$$\frac{\partial p'}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial p'}{\partial t}+a\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}. \tag{77.9}$$

如果以$\tau+x/c$代换t，这一方程变为

$$\frac{\partial p'}{\partial x}=a\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2},$$

即一维的导热方程.

该方程的一般解可以写为(参看§51)

$$p'(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a x}}\int p_0'(\tau')\exp\left[-\frac{(\tau'-\tau)^2}{4ax}\right]d\tau', \tag{77.10}$$

其中$p_0'(\tau)=p'(0,\tau)$. 如果波是在有限时间间隔内发射的，则在离声源足够大的距离上，这一表达式变为

① 能够产生强吸收且仍可以用通常方法加以处理的一种特殊情况是：气体的导热系数异乎寻常地超过了粘性系数，原因是出现了诸如在极高温度下辐射传热之类的效应.

$$p'(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a x}}\exp\left(-\tau^2/4ax\right)\int p_0'(\tau')\,d\tau'. \qquad (77.11)$$

换句话说，在远距离处波形是高斯曲线．它的“宽度”为$\sqrt{ax}$的量级，即波的宽度按波所通过的距离的平方根的规律而增大，而波幅则与$\sqrt{x}$成反比地减小．因此，我们立刻可以断定，波的总能量随着$1/\sqrt{x}$而减小．

容易导出球面波的类似公式．为此，我们必须用到以下事实，即对于这种波，有

$$\int p'\,dt=0$$

(参看§69)．在现在的情况下，我们得到的不是(77.11)式，而是

$$p'(r,\tau)=常数\times\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\exp(-\tau^2/4ar)}{\sqrt{r}}\right],$$

或

$$p'(r,\tau)=常数\times\frac{\tau}{r^{5/2}}\exp(-\tau^2/4ar). \qquad (77.12)$$

当声波在固壁上反射时，一定要发生强烈的吸收(K.Φ.赫兹菲尔德，1938；Б.П.康斯坦丁诺夫，1939)，其理由如下．在声波中，不仅是密度和压力，而且温度也围绕其平均值作周期性的振动．因此，即使固壁近旁流体的平均温度等于壁面温度，在流体和壁面之间也还存在一个周期性的脉动温差．但是，在壁面上，固壁的温度和紧贴着的流体的温度必须相同．因此，在一个很薄的流体边界层内，就会形成很大的温度梯度，即流体温度由其在声波中的值迅速地改变到壁面的温度值．然而，出现大的温度梯度将导致因导热而产生的强能量耗散．由于类似的理由，当声波从某个斜方向入射到壁面上时，流体的粘性也将引起强吸收．在这种情况下，声波中的流体速度(它沿着波传播的方向)有一个与表面相切的非零分量．但是在壁面上，流体必须完全“粘着”于壁面．因此，在流体

边界层中，一定会产生相当大的切向速度梯度①，从而引起相当大的能量粘性耗散(参看问题1).

问　题

问题1. 当声波受到固壁反射时，假设固壁密度很大使得声音不能穿透；且比热很大，以致壁温可以看作常数. 试求被吸收的能量的百分比.

解: 取固壁平面为平面 $x=0$，以入射平面作为 xy 平面，且设入射角(它等于反射角)为 θ. 在表面的任何给定点上(比如说，$x=y=0$)，入射波中密度的变化为 $\rho_1'=Ae^{-i\omega t}$. 反射波具有相同的波幅. 所以在壁面上 $\rho_2'=\rho_1'$. 因为有两个波(入射波与反射波)同时传播，所以，流体密度的实际变化为 $\rho'=2Ae^{i\omega t}$. 声波中的流体速度为 $\boldsymbol{v}_1=c\rho_1'\boldsymbol{n}_1/\rho$，$\boldsymbol{v}_2=c\rho_2'\boldsymbol{n}_2/\rho$. 因而，壁面上合速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ 的大小就是

$$v=v_y=2A\sin\theta c e^{-i\omega t}/\rho$$

(或者更确切地说，这是在不使用准确的粘性固壁边界条件时所求得的速度). 速度 v_y 沿着壁面方向的实际变化由公式(24.13)给出，而粘性引起的能量耗散则由公式(24.14)确定，该式中的 $v_0e^{-i\omega t}$ 必须用上面关于 v 的表达式代换.

如果计算时不采用壁面上的精确边界条件，可求得温度对其平均值(即壁面温度)的偏离(参看(63.13)式)为$T'=2Ac^2T\beta e^{-i\omega t}/c_p\rho$. 但是实际上，温度分布要在边界条件 $x=0, T'=0$ 之下求解导热方程来确定. 因此，它将由一个完全类似于(24.13)的公式表示.

在算出了公式(77.1)中第一项所表示的由传热引起的能耗散后，我们就求得了壁面上每单位面积的总能量耗散为

$$\overline{\dot{E}}_{\text{机}}=-\frac{A^2c^2\sqrt{2\omega}}{\rho}\left[\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)+\sqrt{\nu}\sin^2\theta\right].$$

由入射波投射到单位面积壁面上的平均能量通量密度为

$$c\rho\overline{v_1^2}\cos\theta=(c^3A^2/2\rho)\cos\theta.$$

因此，反射时被吸收的能量比数为

$$\frac{2\sqrt{2\omega}}{c\cos\theta}\left[\sqrt{\nu}\sin^2\theta+\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)\right].$$

---

① 由于边界条件的要求，无论有无粘性，边界上的法向速度分量总是零.

这个表达式只有当它的值很小时才正确(因为在推导该式时，我们已经假设入射波与反射波的振辐相同). 这一条件意味着，入射角 θ 一定不能太接近于 $\pi/2$. ①

问题 2. 试求在圆柱形导管中传播的声音的吸收系数.

解: 大部分声吸收是由管壁存在而引起的. 吸收系数 γ 等于每单位时间内在每单位长度的管壁上所耗散的能量除以通过管截面的总能量通量的两倍. 应用与问题 1 中完全类似的方法，可算得下列结果:

$$\gamma=\frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}\,Rc}\left[\sqrt{\nu}+\sqrt{\chi}\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)\right],$$

其中 R 是圆管半径.

问题 3. 设声音在导热系数极高的介质中传播，试求频散关系.

解: 当存在大的导热系数时，声波中的流动不是绝热运动. 因此，现在代替等熵条件的为

$$\dot{s}=\frac{\kappa\Delta T'}{\rho T},\tag{1}$$

这是没有粘性项的方程(49.4)的线性化形式. 我们取

$$\ddot{\rho}'=\Delta p'\tag{2}$$

为第二个方程，它是由方程(63.2)和(63.3)消去 v 以后得出的. 以 p' 与 T' 为基本变量，则可把 ρ' 与 s' 写成下列形式:

$$\rho'=\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p T'+\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T p',$$

$$s'=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p T'+\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T p'.$$

将这些表达式代入(1)和(2)，然后寻求与 $e^{i(kx-\omega t)}$ 成正比形式的 T' 与 p'. 关于 p' 和 T' 的两个方程的相容条件(应用了热力学量的导数之间的各种关系式)，可以化为下面的形式:

$$k^4-k^2\left(\frac{\omega^2}{c_T^2}+\frac{i\omega}{\chi}\right)+\frac{i\omega^3}{\chi c_s^2}=0,\tag{3}$$

这个式子给出所求的 k 与 ω 之间的关系. 这里我们采用了符号:

$$c_s^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s,\qquad c_T^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T=\frac{c_s^2}{\gamma},$$

① 关于任何角度下反射的声吸收问题，已由 Б. П. 康斯坦丁诺夫给出计算结果，参看 Журнал Технической физики, 9, 226, 1939.

其中，$\gamma=c_p/c_v$ 为比热之比.

在低频极限($\omega\ll c^2/\chi$)的情况下，方程(3)给出

$$k=\frac{\omega}{c_s}+i\frac{\omega^2\chi}{2c_s}\left(\frac{1}{c_T^2}-\frac{1}{c_s^2}\right),$$

这对应于声音以通常的"绝热"速度 c_s 传播并且吸收系数(即(77.6)式的第二项)很小的情况. 本来也应当是这样，因为条件 $\omega\ll c^2/\chi$ 意味着，在一周期的时间内，热量仅能传递$\sqrt{\chi/\omega}$量级的距离(参看(51.7))，这距离和波长 c/ω 比较起来要小得多.

相反地，在高频率的极限情形下，我们由(3)式求得

$$k=\frac{\omega}{c_T}+\frac{ic_T}{2\chi c_s^3}(c_s^2-c_T^2).$$

在这种情况下，声音以"等温"速度 c_T 传播，该值总是小于 c_s. 吸收系数同样远小于波长的倒数，它与频率无关，而和导热系数成反比①.

问题 4. 设声音在两种物质的混合物中传播，试求由扩散引起的附加吸收(И. Г. 夏普什尼可夫和З. А. 戈里德别尔格，1952).

解: 混合物中有一种附加的声吸收源，因为声波产生的温度和压力梯度会引起不可逆的热扩散和压力扩散过程(但是显然没有物质浓度梯度，因而没有质量传输). 这种吸收由熵变化率公式(58.13)中的一项

$$\frac{1}{T\rho D}\left(\frac{\partial\mu}{\partial C}\right)_{p,T}\int i^2dV$$

给出；这里我们用 C 表示浓度以区别于声速 c. 扩散通量为

$$i=-\rho D[(k_T/T)\nabla T+(k_p/p)\nabla p],$$

k_p 由(58.10)式确定. 作类似于 §77 中做过的那种计算，并且利用热力学量导数之间的某些关系式，即可求得如下结果，即在吸收系数的表达式(77.6)中，还必须添加另外一项:

$$\gamma_D=\frac{D\omega^2}{2c\rho^2(\partial\mu/\partial c)_{p,T}}\left\{\left(\frac{\partial\rho}{\partial c}\right)_{p,T}+\frac{k_T}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p,c}\left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)_{p,T}\right\}^2.$$

问题 5. 设声音被一个半径远小于$\sqrt{\nu/\omega}$的球所吸收，试求其有效吸收截面.

---

① 方程(3)是 k^2 的二次方程，它的第二个根对应于随 x 增大而迅速衰减的"热波". 在 $\omega\chi\ll c^2$ 的极限情形下，这个根给出

$$k=\sqrt{i\omega/\chi}=(1+i)\sqrt{\omega/2\chi},$$

它和(52.17)式一致. 在 $\omega\chi\gg c^2$ 的情形，则有 $k=(1+i)\sqrt{\omega c_v/2\chi c_p}$.

解: 总吸收是由气体的粘性和导热两种效应组成的. 前者取决于声波中的运动气体绕小球流动时斯托克斯摩擦力所做的功. 如同§76的问题3一样,这里假设小球不因摩擦力的作用而产生运动. 导热效应则取决于单位时间内由气体传递给球的热量 q(参看§76问题3);当传递的热量为 q,且(离球很远的)气体与球之间的温度差为 T'时,能量耗散为 qT'/T. 于是,可求得总有效吸收截面为

$$\sigma=\frac{2\pi R}{c}\left[3\nu+2\chi\left(\frac{c_p}{c_v}-1\right)\right].$$

§78. 第二粘度

第二粘性系数 ζ(我们将简称为第二粘度)通常和粘性系数 η 为同一量级. 但是,有些场合的 ζ 值可以大大超过 η. 大家知道,第二粘度总是伴随着有流体体积(亦即密度)变化的过程而产生的. 流体在压缩和膨胀时,如同任一种急剧改变状态时一样,将不再处于热力学平衡态. 于是,在流体中就会发生某些内部过程,它们趋向于恢复这种平衡. 通常,这些过程进行得很迅速(即它们的弛豫时间很短),几乎是随着体积的变化立刻就恢复了平衡,当然,某些体积变化率非常大的情形要除外.

但是,也可能出现一些过程,它们恢复平衡的弛豫时间很长,即过程进行得很慢. 例如,我们考察一种液体或气体,它是几种物质的混合物,这些物质之间可以进行化学反应; 那么,对于任何给定的密度和温度来说,总存在一个由混合物中的物质浓度所表征的化学平衡态. 例如,若压缩流体使平衡受到破坏,反应就开始进行; 其结果是,这几种物质浓度将趋于与新的密度及温度相对应的平衡值. 假使这种反应进行得不快,平衡也就恢复得较慢,而不是压缩一发生,其平衡就立刻恢复. 这后一种过程,将伴有趋于平衡态的内部过程. 但是,建立平衡的过程是不可逆的,它们使熵增大,因而总要耗散能量. 所以,如果这些过程的弛豫时间很长,则

当流体受到压缩或膨胀时，就会产生相当大的能量耗散；且由于这种能量耗散是由第二粘度来确定的，这样，我们就可得出 ζ 值很大的结论 ①.

耗散过程的强度以及 ζ 值，当然取决于压缩或膨胀的速率与弛豫时间之间的关系. 例如，如果是声波引起的压缩或膨胀，则第二粘度就依赖于波的频率. 因此，第二粘度不仅是表征有关物质的一个常数，而且还依赖于运动频率. ζ 对于频率的依赖关系称为它的**频散**.

下面用来讨论所有这些现象的一般方法，是由 Л. И. 曼杰利什塔姆和 M. A. 列昂托维奇提出的(1937). 设 ξ 是表征物体状态的某个物理量，ξ_0 是它在平衡态的值；ξ_0 是密度与温度的函数. 例如，在混合流体中，ξ 可以是一种组分的浓度，从而 ξ_0 就是它在化学平衡态的浓度.

如果物体不处在平衡态，ξ 将随时间而变化，并趋于值 ξ_0. 在接近平衡的状态时，差值 $\xi-\xi_0$ 是一个小量，于是，我们可以将 ξ 的变化率 $\dot{\xi}$ 展开成这个差值的幂级数. 因为在平衡态即 $\xi=\xi_0$ 时，$\dot{\xi}$ 必为零，所以不存在零阶项. 因此，取到一阶项为止，有

$$\dot{\xi}=-(\xi-\xi_0)/\tau, \tag{78.1}$$

比例系数必须为负值，否则，ξ 将不趋于有限的极限值. 正常数 τ 具有时间的量纲，因而可以看作所讨论过程的弛豫时间；τ 值越大，趋于平衡的过程进行得越缓慢.

下面，我们来考察流体受到周期性绝热压缩和膨胀的过程 ②，因此，流体的密度(和其它热力学量)的可变部分将通过因子 $e^{-i\omega t}$

① 产生大 ζ 值的慢过程，通常是从分子的平动自由度向(分子内部的)振动自由度的能量传递过程.

② 熵的变化(在接近于平衡态时)是二阶小量；因此，在准确到一阶小量的范围内，可以把这一过程称做绝热过程.

而依赖于时间；这里，我们所研究的是流体中的声波．平衡位置也随着密度以及其它物理量一起变化，所以 ξ_0 可以写成 $\xi_0=\xi_{00}+\xi_0'$，其中，ξ_{00} 是对应于平均密度的一个不变的 ξ_0 值，而 ξ_0' 是正比于 $e^{-i\omega t}$ 的周期性变化部分．将 ξ 的真实值写成

$$\xi=\xi_{00}+\xi',$$

由方程(78.1)，我们可推断出 ξ' 也是时间的周期函数，且与 ξ_0' 的关系为

$$\xi'=\frac{\xi_0'}{1-i\omega\tau} \tag{78.2}$$

我们来计算该过程中压力对于密度的导数．现在，压力必须视为密度和所讨论的状态下 ξ 值的函数，它也是熵的函数；但由于我们假设熵为常数，为了简单起见，就略去不写了．于是

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi+\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_\rho\frac{\partial \xi}{\partial \rho}.$$

按照(78.2)，把

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho}=\frac{\partial \xi'}{\partial \rho}=\frac{1}{1-i\omega\tau}\frac{\partial \xi_0'}{\partial \rho}=\frac{1}{1-i\omega\tau}\frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}$$

代入上式，就得到

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}=\frac{1}{1-i\omega\tau}\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi+\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_\rho\frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}-i\omega\tau\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi\right\}.$$

$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi+\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_\rho\frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}$这两项之和正好是某过程中 p 对于 ρ 的导数，这种过程进行得如此之慢，以致流体总是保持在平衡态．将这种导数记为$(\partial p/\partial \rho)_{eq}$，最后得出

$$\frac{\partial p}{\partial \rho}=\frac{1}{1-i\omega\tau}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{eq}-i\omega\tau\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\xi\right]. \tag{78.3}$$

其次，设 p_0 为热力学平衡态的压力；p_0 和其它热力学量的关系由流体的状态方程表示，因此，当密度和熵给定后，p_0 就完全确定了．但是，非平衡态的压力 p 不同于 p_0，且 p 也是 ξ 的函数．如

果密度绝热地增大$\delta\rho$，平衡压力将变化$\delta p_0=(\partial p/\partial\rho)_{eq}\delta\rho$，而总的压力增量则为$(\partial p/\partial\rho)\delta\rho$，其中$\partial p/\partial\rho$由公式(78.3)确定．因此，当所处状态的密度为$\rho+\delta\rho$时，真实压力与平衡压力之差$p-p_0$为

$$p-p_0=\left[\frac{\partial p}{\partial\rho}-\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{eq}\right]\delta\rho$$

$$=\frac{i\omega\tau}{1-i\omega\tau}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{eq}-\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{\xi}\right]\delta\rho. \tag{78.3a}$$

这里，我们关心的是由于流体的运动而产生的密度变化．因此，$\delta\rho$与速度的关系由连续方程表示，我们把它写成这样的形式：$\frac{d}{dt}(\delta\rho)+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$，其中，$\frac{d}{dt}$表示全时间导数．在周期运动中，我们有$\frac{d}{dt}(\delta\rho)=-i\omega\delta\rho$，因此，$\delta\rho=\frac{\rho}{i\omega}\nabla\cdot\boldsymbol{v}$．将此式代入(78.3a)，得到

$$p-p_0=\frac{\tau\rho}{1-i\omega\tau}(c_0^2-c_\infty^2)\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{78.4}$$

这里，我们使用了符号

$$c_0^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{eq},\quad c_\infty^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{\xi}, \tag{78.5}$$

其意义将在下面解释．

为了找到这些表达式和流体粘度之间的关系，我们写出应力张量σ_{ik}．在此张量中，压力出现于$-p\delta_{ik}$项内．如果将压力p减去由状态方程确定的压力p_0，我们发现，在非平衡态下，σ_{ik}含有一个附加项

$$-(p-p_0)\delta_{ik}=\frac{\tau\rho}{1-i\omega\tau}(c_\infty^2-c_0^2)\delta_{ik}\nabla\cdot\boldsymbol{v}.$$

将该式与应力张量的一般表达式(15.2)和(15.3)加以对比，(在后两个表达式中，$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$出现在$\zeta\nabla\cdot\boldsymbol{v}$项内)，我们可以断定：为建立

平衡态而出现的慢过程，在客观上等价于出现第二粘度，其表达式为

$$\zeta=\frac{\tau\rho(c_\infty^2-c_0^2)}{1-i\omega\tau}. \tag{78.6}$$

这些过程不影响普通粘度 η. 当过程慢到使 $\omega\tau\ll1$ 时， ζ 为

$$\zeta=\tau\rho(c_\infty^2-c_0^2). \tag{78.7}$$

它随弛豫时间 τ 的增大而增大，这与上面的叙述一致．当频率很大时，ζ 将依赖于频率，即此时将出现频散．

现在来研究，如有弛豫时间长的过程出现(为确定起见，我们将讨论化学反应过程)，会怎样影响流体中声音的传播．为此，我们可以从粘性流体的运动方程出发，而使 ζ 取公式(78.6)的值．但是，更简便的做法是研究这样一种运动，其中，粘性可以略去不计，但压力 p 应由前面的公式而不是由状态方程给出．这样，在§63中得到的某些一般关系式，形式上还是可以应用的．特别是，波数和波频的关系仍然是 $k=\omega/c$，其中 $c=\sqrt{\partial p/\partial\rho}$，而导数 $\partial p/\partial\rho$ 现在则由(78.3)式来表示．但是，量 c 是一个复数，已不再表示声速．于是，我们得到

$$k=\omega\sqrt{\frac{1-i\omega\tau}{c_0^2-c_\infty^2 i\omega\tau}}. \tag{78.8}$$

由这个公式给出的“波数”是复数．这一事实的意义是不难理解的．在平面波中，所有的量通过因子 e^{ikx} 依赖于坐标 x(x 轴是波传播的方向)．将 k 写成

$$k=k_1+ik_2$$

的形式，其中 k_1 和 k_2 为实数，我们有 $e^{ikx}=e^{ik_1x}\cdot e^{-k_2x}$，即除去周期因子 e^{ik_1x} 之外，还有一个阻尼因子 e^{-k_2x}（当然，k_2 必须为正数）．因此，波数的复数性合理地表示出波受到阻尼，即存在声吸收这一事实．复波数的实部代表了波的位相随距离的变化，而虚部则为吸收系数．

将(78.8)式的实部和虚部分开是不困难的．在ω为任意的一般情况下，k_1和k_2的表达式相当繁复，这里不拟写出．重要的是k_1是频率的函数(k_2同样如此)，因此，如果流体中会发生化学反应，则在足够高的频率下，声音的传播将伴有频散．

在低频($\omega\tau\ll1$)的极限情况下，公式(78.8)在一阶近似程度上给出$k=\omega/c_0$，相当于声音以速度c_0传播．当然，这是合乎逻辑的：条件$\omega\tau\ll1$意味着声波的周期$1/\omega$要比弛豫时间大得多，即随着声波中密度的改变，紧接着就建立了化学平衡，所以，声速可由导数$\partial p/\partial\rho$的平衡值确定．在二阶近似上，则有

$$k=\frac{\omega}{c_0}+\frac{i\omega^2\tau}{2c_0^3}(c_\infty^2-c_0^2),\tag{78.9}$$

就是说，出现了阻尼，其吸收系数正比于频率的平方．利用(78.7)式，我们可以把k的虚部写成$k_2=\frac{\omega^2\zeta_0}{2\rho c_0^3}$；这和(77.6)式所表示的吸收系数$\gamma$中与$\zeta$有关的那一部分相吻合，而(77.6)式是在没有考虑频散效应的情况下得到的．

在高频($\omega\tau\gg1$)的相反极限情况下，一阶近似给出$k=\omega/c_\infty$，即声音以速度c_∞传播——这也是一个自然的结果．因为当$\omega\tau\gg1$时，我们可以认为在一个周期内没有发生反应，所以，声音的速度必须以浓度不变时所取的导数$(\partial p/\partial\rho)_\xi$来确定．二阶近似给出

$$k=\frac{\omega}{c_\infty}+i\frac{c_\infty^2-c_0^2}{2\tau c_\infty^3},\tag{78.10}$$

即阻尼系数与频率无关．如果ω从$\omega\ll1/\tau$变化到$\omega\gg1/\tau$，这一系数将单调地增大到由公式(78.10)给出的常数值．应当指出，k_2/k代表一个波长距离上的吸收量，这个比值在两种极限情况下都是小量($k_2/k_1\ll1$)；它在某个中间的频率，即$\omega=\frac{1}{\tau}\sqrt{c_0/c_\infty}$时，有

一个最大值.

例如，由(78.7)式可以看出：

$$c_\infty > c_0 \tag{78.11}$$

这是因为必有 $\xi>0$. 利用勒夏忒列原理作一些简单的推理，也可以得出同样的结果. 我们假设在某种外部作用下系统的体积减小，密度增大. 于是系统就离开平衡态，根据勒夏忒列原理，此时一定要发生一种使压力趋于减小的过程. 这意味着 $\partial p/\partial\rho$ 将减小. 于是当系统重趋平衡时，$\partial p/\partial\rho=c^2$ 的值将小于其非平衡态值.

在上述所有公式的推导中，我们假设了只有一种缓慢的内部弛豫过程，也可能存在几种不同的此类过程同时发生的情形. 所有上述诸公式都不难加以推广，使其亦可适用于这种情形. 但此时已不再是只有一个量 ξ，而是有若干个表征系统状态的量 $\xi_1, \xi_2, \cdots$，和一系列对应的弛豫时间 $\tau_1, \tau_2, \cdots$. 我们可以这样选择 ξ_n，使得每一个导数 $\dot{\xi}_n$ 仅依赖于对应的 ξ_n，即

$$\dot{\xi}_n=-(\xi_n-\xi_{n0})/\tau_n \tag{78.12}$$

作与前面完全类似的计算，可得

$$c^2=c_\infty^2+\sum_n\frac{a_n}{1-i\omega\tau_n}, \tag{78.13}$$

其中 $c_\infty^2=(\partial p/\partial\rho)_\xi$，而常数 a_n 为

$$a_n=\left(\frac{\partial p}{\partial\xi_n}\right)\left(\frac{\partial\xi_n}{\partial\rho}\right)_{\text{eq}}. \tag{78.14}$$

如果只有一个量 ξ，公式(78.13)当然就变成(78.3).

第九章 激　　波

§79. 运动气体中扰动的传播

当流体运动的速度接近或超过声速时，流体的可压缩性效应就变得非常重要. 实际上，这种运动总是发生在气体当中，所以，通常把高速流体动力学称为**气体动力学**.

首先应当指出：气体动力学中所涉及的雷诺数通常是很大的. 因为我们由气体分子运动论知道，气体的运动粘性系数 ν，是与分子平均自由程 l 和分子热运动平均速度的乘积同一量级，而分子热运动平均速度与声速 c 是同一量级，所以 $\nu \sim cl$. 如果气体动力学问题中特征速度也与 c 同一量级，则雷诺数 $R \sim Lc/\nu \sim L/l$，即 R 由尺度 L 与平均自由程 l 的比值确定，我们知道，这个比值是很大的①. 因为当 R 很大时，粘性总是只在很狭窄的区域内才对气体运动有重要影响，所以，今后(除特别指出的某些相反情况以外)，我们将把气体看作是理想流体.

按照气流是**亚声速**的还是**超声速**的，即速度是小于或大于声速，这些流动在性质上便完全不同. 超声速流动最重要且独有的特性之一，是其中可能出现所谓**激波**，激波的性质，我们将在下面几节中详细研究. 这里，我们要研究超声速流动的另一特性，它与气体中小扰动的传播方式有关.

假如作定常运动的气体，在任意一点受到轻微的扰动，接着，扰动的影响就以声速(相对于气体本身)在气体中传播. 相对于固

① 我们不考虑物体在很稀薄的气体中运动的问题，在很稀薄的气体中，分子平均自由程与物体尺度是相当的. 这种问题实质上不是气体动力学问题，而必须用气体分子运动论进行研究.

定坐标系，扰动的传播速度由两部分组成：第一，扰动被气流以速度 $\boldsymbol{v}$"带走"；第二，它相对于气体，沿任何方向 $\boldsymbol{n}$ 都以速度 c 传播. 为简单起见，我们来研究具有等速 $\boldsymbol{v}$ 的均匀气流，在某点 O（固定在空间中），它受到一个小扰动. 扰动从点 O 传播出去的速度 $\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{n}$（相对于固定坐标系）在不同的单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 方向上有不同的值. 将矢量 $\boldsymbol{v}$ 的一端置于点 O；以 $\boldsymbol{v}$ 的另一端为球心，以 c 为半径画一球面，即可求得传播速度所有可能的值. 从点 O 到球面上各点的矢量，给出扰动传播速度所有可能的大小和方向. 我们先假设 $v<c$，则矢量 $\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{n}$ 在空间中可以有任意方向（图 40a）. 也就是说，在亚声速流动中，从任何一点发出的扰动最终将到达气体中每一点. 反之，若 $v>c$，则如图 40 b 所示，矢量 $\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{n}$ 的方向就只能在以 O 为顶点的圆锥之内，这个圆锥与以矢量 $\boldsymbol{v}$ 另一端为球心的圆球相切. 设圆锥顶角为 2α，则由图看出：

$$\sin\alpha = c/v. \tag{79.1}$$

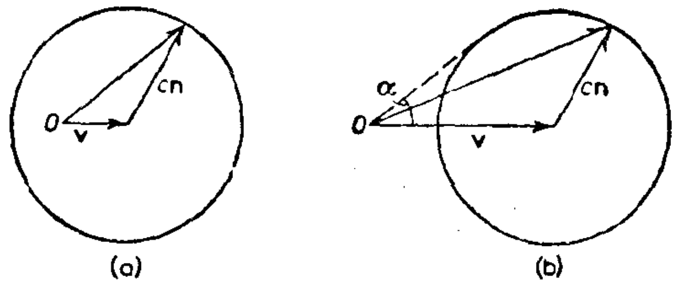


图 40

这样，在超声速流动中，从任一点发出的扰动只能在一个圆锥之内顺流传播，比值 c/v 越小，这个圆锥的顶角也就越小. 由点 O 发出的扰动不影响这个圆锥外面的流动.

由方程(79.1)所确定的角 α 称为**马赫角**. 比值 v/c 本身是在气体动力学中经常出现的，称为**马赫数** M：

$$\mathrm{M} = v/c. \tag{79.2}$$

由一给定点发出的扰动所达区域的界面称为**马赫面**或**特征面**.

在任意定常气流的一般情况下，马赫面并不是在整个流动区域为一个圆锥．但是可以断言：马赫面与通过这个曲面上任意一点的流线的夹角仍旧是马赫角．马赫角的数值是随速度 v 和 c 的变化而逐点变化的．这里顺便强调指出，在高速气流中，不同点上的声速是不同的，它随着热力学量(压力、密度等)而变化，即声速是热力学量的函数①．作为坐标的函数的声速，有时称为**当地声速**．

超声速流动的上述性质，使此流动具有与亚声速流动大不相同的特征．假如亚声速气流遇到任何障碍物（例如，它绕物体流动)，那末，这个障碍物的存在将影响到包括上游和下游在内的整个流动空间，只有在离障碍物无穷远的地方，它的影响才渐近地趋于零．但是，超声速气流是“盲目地”碰到障碍物上的，障碍物的影响只延及下游②；而在剩下的整个上游区域，气流如同不存在障碍物时一样．

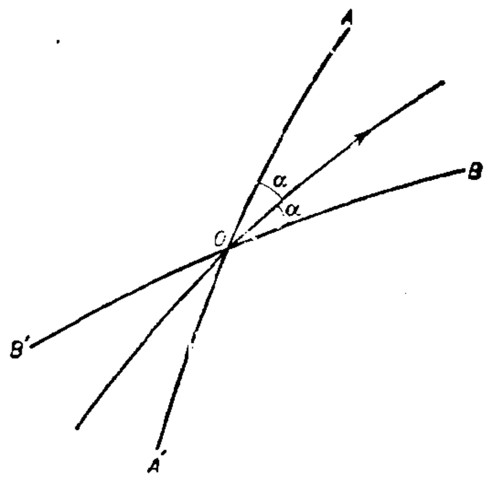


图 41

在平面定常气流情况下，特征面可用流动平面内的**特征曲线**(或简称**特征线**)代替．通过这个平面内任意一点 O 有两条特征线(图 41 中的 AA' 和 BB')，它们与通过该点流线的交角为马赫角．特征线的下游分支 OA 和 OB，可称为由点 O **发出**的分支，它们围成的流动区域 AOB，是从点 O 发出的扰动所能够影响到的区域．分支 $B'D$ 和 $A'O$，可称为**到达**点 O 的分支，它们之间的区域 $A'OB'$，

① 在第八章中讨论声波时，声速可看作常数．

② 为避免误解，应该指出：如果在障碍物前面形成激波，则这个区域要稍微扩大一些(参看 § 114)．

是能够影响 O 点流动的区域.

特征线(在三维情形是特征面)的概念，还有一种稍微不同的含义. 即它们是一些满足几何声学条件的声线，而扰动就沿着这些声线"传播". 例如,若定常超声速气流遇到一个很小的障碍物,则沿着由这障碍物发生的特征线，将发现气流的定常扰动. 这与§67中研究运动介质的几何声学时所得到的结果相同.

当我们提到气体状态的扰动时，指的是描写气体状态的任一特征量(诸如速度、压力、密度等)的微小变化. 关于这一点，应作如下说明：气体熵值(在定压下)和气体涡量的扰动不是以声速传播的. 这些扰动一旦出现,相对于气体就是不动的;而相对于固定坐标系，它们则以对应于每一点的气体速度随气体一起运动. 对熵而言,这是理想流体中守恒律的一个直接结果:

$$ds/dt \equiv \partial s/\partial t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla s = 0,$$

上式表明,气体中任意给定的体元运动时,其熵保持不变,即每个 s 值随着它所归属的点一起运动. 对涡量而言，由环量守恒可得相同的结果.

于是,对熵值和涡量的小扰动而言，可以说特征线就是流线. 当然，这不会改变上述关于影响区域的论述的普遍正确性. 因为那些论述的基础仅在于:相对于气体本身而言,扰动传播有一最大速度(声速).

§80. 气体的定常流动

由伯努利方程，我们可直接得出关于气体绝热定常流动的若干一般性结果. 对于定常流动,沿每条流线,伯努利方程为

$$w + \frac{1}{2}v^2 = 常数;$$

如果是势流,则对每一条流线,即对流体中的每一点,常数均相同.

若在某条流线上，有一点的气体速度为零，则可把伯努利方程写成

$$w+\frac{1}{2}v^2=w_0, \tag{80.1}$$

式中，w_0 是 $v=0$ 那一点上的焓值.

对于定常流动，熵的守恒方程为

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla s=v\partial s/\partial l=0,$$

即沿着每一条流线，s 为常数. 我们可以把这个方程写成类似于(80.1)的形式：

$$s=s_0. \tag{80.2}$$

由方程(80.1)可知，在焓 w 较小的那些点上，速度 v 较大.（在所讨论的流线上）w 最小的点，其速度值最大. 然而在等熵情形下，$dw=dp/\rho$；因为 $\rho>0$，所以微分 dw 和 dp 同号，因而 w 和 p 按相同趋势变化. 于是可以说，沿着一条流线，当压力减小时速度增加，反之亦然.

在绝热流动中，压力和焓的最小可能值，是在绝对温度 $T=0$ 时得到的. 这个对应的压力是 $p=0$，而我们不妨取 $T=0$ 时 w 的值为能量的零点；于是 $T=0$ 时，$w=0$. 由方程(80.1)，现在可导出速度的最大可能值（在 $v=0$ 处的诸热力学量之值都给定的情况下）为

$$v_{\max}=\sqrt{2w_0}. \tag{80.3}$$

当气体定常地流向真空时，可以达到这个速度①.

现在我们来考虑质量通量密度 $j=\rho v$ 沿流线如何变化. 由欧拉方程 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p$，我们得到沿一条流线微分 dv 和 dp 的关系式：$v\,dv=-dp/\rho$，令 $dp=c^2d\rho$，则得

$$d\rho/dv=-\rho v/c^2, \tag{80.4}$$

① 当然，在温度急剧降低的实际情况下，气体必然凝结并形成二相的"雾"，但这对上述结果没有本质的影响.

把该式代入 $d(\rho v)=\rho dv+vd\rho$，即得

$$d(\rho v)/dv=\rho(1-v^2/c^2). \tag{80.5}$$

由此我们看到，只要流动保持是亚声速的，则当速度沿着流线增加时，质量通量密度也增加．但在超声速范围内，质量通量密度随着速度的增加而减少，当 $v=v_{max}$ 时，它和 ρ 一同变为零（图 42）．亚声速和超声速定常流动之间这一重要差别，可简单地解释如下：亚声速流动中，流线沿着速度增加的方向靠拢；而在超声速流动中，流线沿速度增加的方向散开．

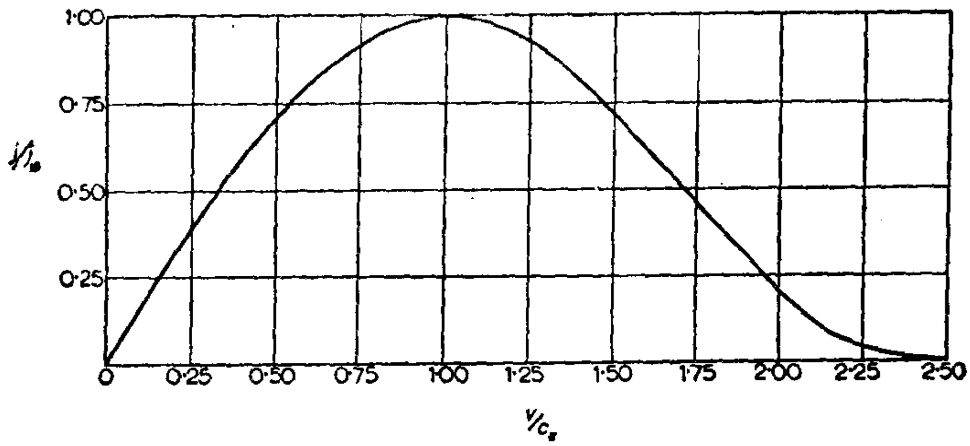


图 42

在气体速度等于当地声速的那一点上，通量 j 达最大值 j_*：

$$j_*=\rho_* c_*, \tag{80.6}$$

式中，星号下标表示对应于上述该点的值．速度 $v_*=c_*$ 称为**临界速度**．在任意气体的一般情况下，各种量的临界值，可以通过解联立方程

$$s_*=s_0,\quad w_*+\frac{1}{2}c_*^2=w_0, \tag{80.7}$$

用各量在 $v=0$ 点的值来表示．

很明显，只要 $M=v/c<1$，就有 $v/c_*<1$；而如果 $M>1$，则 $v/c_*>1$. 因而在这种情况下，比值 $M_*=v/c_*$ 可用作类似于 M 的判据，并且这样更方便，因为 c_* 是常数，而不像 c 那样沿着流线在

变化.

就气体动力学一般方程组的应用而言，理想气体的情形是特别重要的. 对于理想气体，由热力学可知各种热力学量之间的全部关系式，而且这些关系式都非常简单. 这就使我们在很多情况下有可能给出气体动力学方程的完全解.

作为参考，现在列出理想气体各种热力学量之间的关系式，因为下面经常要用到它们. 我们总是假定(除特别说明者外)理想气体的比热与温度无关.

理想气体的状态方程为

$$pV=p/\rho=RT/\mu, \tag{80.8}$$

式中，$R=8.314\times10^7$ 尔格/度是气体常数，μ 是气体的分子量. 如同 § 63 所表明的，理想气体中的声速为

$$c^2=\gamma RT/\mu=\gamma p/\rho, \tag{80.9}$$

这里，我们引进了比热之比 $\gamma=c_p/c_v$ 这个常数，γ 永远大于 1. 在常温下，单原子气体的 $\gamma=5/3$；双原子气体的 $\gamma=7/5$.

若不计及不重要的附加常数，则理想气体的内能为

$$\epsilon=c_vT=pV/(\gamma-1)=c^2/\gamma(\gamma-1). \tag{80.10}$$

对于焓，我们有类似的公式:

$$w=c_pT=\gamma pV/(\gamma-1)=c^2/(\gamma-1). \tag{80.11}$$

这里利用了熟知的关系式 $c_p-c_v=R/\mu$. 最后，气体的熵为

$$s=c_v\ln(p/\rho^\gamma)=c_p\ln(p^{1/\gamma}/\rho). \tag{80.12}$$

现在，我们把上面所得到的一般关系式应用于理想气体，来研究定常流动. 将(80.11)代入(80.3)，我们求得定常流动的最大速度为

$$v_{max}=c_0\sqrt{2/(\gamma-1)}. \tag{80.13}$$

对于临界速度，由(80.7)的第二个方程得

$$\frac{c_*}{\gamma-1}+\frac{1}{2}c_*^2=w_0=\frac{c_0^2}{\gamma-1},$$

由此①

$$c_*=c_0\sqrt{2/(\gamma+1)}. \tag{80.14}$$

把焓的表达式(80.11)代入伯努利方程(80.1)，可得出流线上任一点的温度和速度的关系式；而压力和密度的类似关系式可由泊松绝热方程

$$\rho=\rho_0(T/T_0)^{1/(\gamma-1)},\quad p=p_0(\rho/\rho_0)^{\gamma}. \tag{80.15}$$

直接求得. 于是得到下列重要结果:

$$\left.\begin{aligned}
T&=T_0\left[1-\frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{v^2}{c_0^2}\right]=T_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{c_*^2}\right),\\
\rho&=\rho_0\left[1-\frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{v^2}{c_0^2}\right]^{1/(\gamma-1)}=\rho_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{c_*^2}\right)^{1/(\gamma-1)},\\
p&=p_0\left[1-\frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{v^2}{c_0^2}\right]^{\gamma/(\gamma-1)}=p_0\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{c_*^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.
\end{aligned}\right\} \tag{80.16}$$

有时，将速度用其它量来表示的关系式使用起来比较方便，即

$$v^2=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}\right]. \tag{80.17}$$

我们也可以给出声速 c 与速度 v 的关系:

$$c^2=c_0^2-\frac{\gamma-1}{2}v^2=\frac{\gamma+1}{2}c_*^2-\frac{\gamma-1}{2}v^2. \tag{80.18}$$

于是得到马赫数M与M_*的关系为

$$M_*^2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1+2/M^2}, \tag{80.19}$$

当M从 0 变到∞时，M_*^2 从 0 变到$(\gamma+1)/(\gamma-1)$.

最后，在公式(80.16)中，令 $v=c_*$，可得临界温度、压力和密

① 图 42 表明空气($\gamma=1.4$, $v_{max}=2.45c_*$)的比值 j/j_*为 v/c_*的函数.

度的表达式①:

$$\left.\begin{aligned}T_* &= \frac{2}{\gamma+1}T_0,\\ p_* &= p_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)},\\ \rho_* &= \rho_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}.\end{aligned}\right\}\tag{80.20}$$

最后,应强调指出:上面推导的结果只适用于不出现激波的流动. 若有激波,方程(80.2)就不成立;当流线穿过激波时,气体的熵增加. 但我们将看到,即使有激波时,伯努利方程(80.1)仍然有效,因为在穿过间断面时,量 $w+\frac{1}{2}v^2$ 是不变的(§82). 例如,公式(80.14)仍然有效.

问　　题

试用马赫数表示沿一条流线的温度、压力和密度.

解: 利用上面所求得的公式,得

$$\frac{T_0}{T}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2,\ \frac{p_0}{p}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},\ \frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

§81. 间断面

在前面几章中,我们只研究了所有的量(速度、压力、密度等)都连续变化的流动. 然而, 这些量的分布发生间断的流动也是可能的.

气流中的间断发生在一个或几个面上,穿过这种面时,有关的量变化不连续,这样的面称为**间断面**. 在非定常气流中,间断面一般是不固定的. 但是,这里应强调指出:这些面的运动速度与气流

① 例如,对空气($\gamma=1.4$)而言,$c_*=0.913c_0$, $p_*=0.528p_0$, $\rho_*=0.634\rho_0$, $T_*=0.833T_0$.

本身的速度无关．运动的气体质点可以穿过间断面．

间断面上必须满足一定的边界条件．为了用公式表示这些条件，我们考虑一个面元，并取坐标系固定在面元上，其 x 轴指向面元的法线方向①．

首先，质量通量必须连续：从间断面一侧流来的气体质量，必须等于从另一侧流走的质量．通过所考虑的面元每单位面积上的质量通量为 ρv_x．于是，一定有 $\rho_1 v_{1x}=\rho_2 v_{2x}$，这里，下标 1 和 2 是指间断面的两侧．

将任意一个量加上方括号，表示间断面两侧这个量之差，例如 $[\rho v_x]\equiv\rho_1 v_{1x}-\rho_2 v_{2x}$，因而刚才所导出的条件可写成

$$[\rho v_x]=0. \tag{81.1}$$

其次，能量通量必须连续．能量通量由(6.3)式给出．因此得到下列条件：

$$\left[\rho v_x\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)\right]=0. \tag{81.2}$$

最后，动量通量必须连续，即间断面两侧气体相互作用的力必须相等．每单位面积的动量通量为(参看 §7) $pn_i+\rho v_i v_k n_k$，法向矢量 $\boldsymbol{n}$ 沿 x 轴．所以动量通量沿 x 轴分量连续性的条件为

$$[p+\rho v_x^2]=0, \tag{81.3}$$

而 y 和 z 分量连续性的条件为

$$[\rho v_x v_y]=0,\quad [\rho v_x v_z]=0. \tag{81.4}$$

方程(81.1)—(81.4)构成间断面上一组完整的边界条件．由这些条件，我们可以立即推出，有可能存在两种类型的间断面．

第一种类型，没有质量通量穿过间断面．这就是说 $\rho_1 v_{1x}=\rho_2 v_{2x}=0$. 因为 ρ_1 和 ρ_2 不为零，可见 $v_{1x}=v_{2x}=0$．因而满足条件(81.2)和(81.4)，而条件(81.3)给出 $p_1=p_2$．于是，法向速度分量

① 如果不是定常流动，我们就考虑在很短的时间间隔内的这个面元．

和气体压力在间断面上是连续的:

$$v_{1x}=v_{2x}=0, \qquad [p]=0, \tag{81.5}$$

而切向速度 v_y、v_z 和密度 (以及除压力以外的其它热力学量)都是可以在任意值处间断的量. 我们把这种间断称为**切向间断**.

第二种类型,质量通量不为零,所以, v_{1x} 和 v_{2x} 也不为零. 因而,由(81.1)和(81.4)得

$$[v_y]=0, \qquad [v_z]=0, \tag{81.6}$$

也就是说,间断面上的切向速度是连续的. 但压力、密度(和其它热力学量) 以及法向速度都是间断的, 其间断关系为 (81.1)—(81.3). 在条件(81.2)中,我们可用(81.1)消去 ρv_x;并且由于 v_y 和 v_z 是连续的,因而可用 v_x^2代替其中的 v^2. 于是,在这种情况下,间断面上必须满足下列条件:

$$\left.\begin{aligned}&[\rho v_x]=0,\\&\left[\frac{1}{2}v_x^2+w\right]=0,\\&[p+\rho v_x^2]=0,\end{aligned}\right\} \tag{81.7}$$

这种间断称为**激波**.

现在,如果我们回到固定坐标系,则必须处处用垂直于间断面的气体速度分量 v_n 与间断面本身的速度 u (定义速度 u 垂直于间断面)之差代替 v_x,即

$$v_x=v_n-u. \tag{81.8}$$

v 和 u 是在固定坐标系中的速度. v_x 是气体相对于间断面的速度. 我们也可以说 $-v_x=u-v_n$ 是间断面相对于气体的传播速度. 应当注意, 如果 v_x 是间断的, 则间断面相对于两侧气体的传播速度的值不同.

我们(在§30中)已讨论过切向间断面,在这种间断面上,切向速度分量是间断的. 我们曾指出,在不可压缩流体中,这样的间断

面是绝对不稳定的，结果一定会形成湍流区．对于可压缩流体，类似的研究表明，在任何速度下，会出现同样的不稳定性．

切向间断的一种特殊“退化”情形是速度是连续的，但密度（因而除压力以外的其它热力学量）却是间断的．上述有关不稳定性的论述与这种间断无关．

§82. 激波绝热关系式

现在来详细研究激波．我们知道，对于这种类型的间断面，气体速度的切向分量是连续的．因此我们可以取这样的坐标系：所考虑的面元在该坐标系中是静止的，且激波两侧气体速度的切向分量为零①．于是，我们可将法向分量 v_x 简写为 v，并将条件 (81.7) 写成下列形式：

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv j, \tag{82.1}$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \tag{82.2}$$

$$w_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = w_2 + \frac{1}{2} v_2^2, \tag{82.3}$$

式中，j 代表间断面上的质量通量密度．下面，我们总把 j 取为正，且气流由 1 侧流向 2 侧．就是说，我们把激波运动所进入的那一侧气体称为气体 1，而把留在激波后的气体称为气体 2．激波对着气体 1 的一侧称为**激波前沿**，对着气体 2 的一侧称为**激波后沿**．

我们将由上面的条件导出一系列关系式．利用比容 $V_1 = 1/\rho_1$，$V_2 = 1/\rho_2$，由 (82.1) 可得

$$v_1 = jV_1, \qquad v_2 = jV_2, \tag{82.4}$$

将上式代入 (82.2)，得

① 在 §§82—85, 87, 88 里，处处都用这种坐标系．

静止激波称为**压缩间断**．若激波垂直于流动方向，就称为**正激波**，否则称为**斜激波**．

$$p_1 + j^2 V_1 = p_2 + j^2 V_2, \tag{82.5}$$

或

$$j^2 = (p_2 - p_1)/(V_1 - V_2). \tag{82.6}$$

这个公式，与(82.4)一起，把激波传播速度与间断面两侧气体的压力、密度联系起来.

因为 j^2 是正的，所以，或者是 $p_2 > p_1, V_1 > V_2$；或者是 $p_2 < p_1$，$V_1 < V_2$. 下面我们将看到，实际只能出现前一种情况.

我们应注意下面关于速度差 $v_1 - v_2$ 的有用公式. 把(82.6)代入 $v_1 - v_2 = j(V_1 - V_2)$，即得①

$$v_1 - v_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}. \tag{82.7}$$

其次，可以把(82.3)写成下列形式：

$$w_1^2 + \frac{1}{2} j^2 V_1^2 = w_2 + \frac{1}{2} j^2 V_2^2, \tag{82.8}$$

再用(82.6)代换上式中的 j^2，得

$$w_1 - w_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0. \tag{82.9}$$

如果用 $\epsilon + pV$ 代替焓 w，这里 ϵ 是内能，我们可以把上式写为

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2) = 0. \tag{82.10}$$

这些就是间断面两侧热力学量之间的关系式.

当 p_1 和 V_1 给定时，方程(82.9)或(82.10)就给出 p_2 与 V_2 之间的关系. 这个关系式称为**激波绝热关系式**或**两贡尼奥绝热关系式**(W. J. M. 兰金，1870，H. 雨贡尼奥，1889). 这个关系式可用 $p \sim V$ 平面上的图形(图43)通过给定点 (p_1, V_1) 的曲线表示[当 $p_1 = p_2, V_1 = V_2$ 时，当然也有 $\epsilon_1 = \epsilon_2$，所以(82.10)总是满足的]. 应注意，除 (p_1, V_1) 点以外，激波绝热曲线不能再与竖直线 $V = V_1$ 相交

① 这里取正的平方根，因为一定有 $v_1 - v_2 > 0$，这在以后(§84)就会知道.

因为如果另外还有一个交点，那就意味着对应于同一个比容有两个不同的压力满足(82.10)．但当$V_1=V_2$时，由(82.10)也有$\epsilon_1=\epsilon_2$，而当比容和能量都相同时，压力也一定相同．所以直线$V=V_1$把激波绝热曲线分成两部分．每一部分完全处于该直线的一侧．同理，激波绝热曲线只在点(p_1,V_1)上与水平直线$p=p_1$相交．

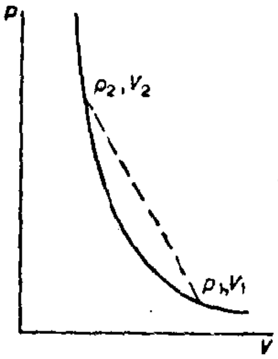


图 43

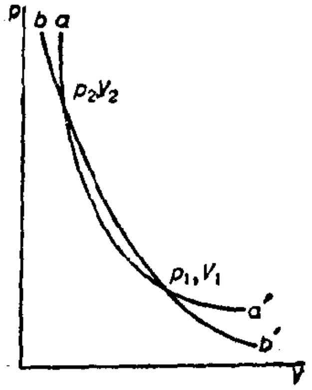


图 44

设aa'(图 44)为通过作为气体 1 状态之一的点(p_1, V_1)的激波绝热曲线．在aa'上取任一点(p_2, V_2)它也代表气体 1 的一种状态，并通过气体 1 的状态的点(p_2, V_2)画出另一条激波绝热曲线bb'．显然(p_1,V_1)这一对值也满足这个绝热曲线方程．因此，绝热曲线aa'和bb'在(p_1,V_1)和(p_2, V_2)两点相交．必须强调指出，这两条绝热曲线，是不象通过一个给定点的泊松绝热曲线那样彼此重合的．这是因为激波绝热方程不能写成$f(p,V)=$常数(这里f是某个函数)；而泊松绝热方程却可写成$s(p,V)=$常数．对于一定的气体，泊松绝热关系组成单参数曲线族；而激波绝热曲线由初始值p_1和V_1这两个参数确定．于是也就有下述重要结果：若相继出现两个(或更多个)激波，使气体从状态 1 变到状态 2，再从状态 2 变到状态 3，则一般说来，要通过任何单个激波，使气体从状态 1 转变到状态 3 是不可能的．

对于给定的气体初始热力学状态(即给定p_1和V_1)，激波由一个参数唯一确定．例如，若给定激波后的压力p_2，则V_2由雨贡尼

奥关系式确定，于是由公式(82.4)和(82.6)，即可给出通量密度 j 和速度 v_1 及 v_2. 但应指出，在这里所考虑的是这种坐标系中的激波：在此坐标系中，气体运动与激波面垂直. 如果激波相对于流动方向是倾斜的，则还需要另一个参数，例如沿激波面切向速度分量的值.

可以指出下列一种用图解释公式(82.6)的方便方法. 如果将激波绝热曲线上的点(p_1, V_1)与曲线上另外任意一点(p_2, V_2)用一根弦相连(图 43)， 则 $(p_2-p_1)/(V_2-V_1)=-j^2$ 恰好是这根弦相对于横坐标轴的斜率. 于是，j 由激波绝热曲线上的每一点与点(p_1, V_1)所连成的弦的斜率所确定，激波速度即随之而定.

与其它热力学量一样，熵在激波上是间断的. 根据熵增加定律，在运动过程中，气体的熵只能增加. 因而气体在穿过激波后，它的熵 s_2 必定超过初始熵 s_1，即

$$s_2 > s_1. \tag{82.11}$$

下面将会看到，这个条件对激波中各个量的变化情形起很重要的制约作用.

应当强调说明以下事实：在可以把整个空间都看作是理想流体运动(粘性系数和热导率为零)的那些流动中，激波的存在导致熵的增加. 熵的增加意味着运动是不可逆的，即能量有耗散. 因此，间断面是理想流体运动中能量耗散的一种结构. 由此可见，当物体在理想流体中以这种方式运动而引起激波时，就不再出现达朗伯佯谬(§11)，而是存在阻力.

当然，激波中熵增加的真正机制是由于在很薄的实际激波层中出现耗散过程(参看§87). 但要注意，耗散量完全由用于激波层两侧的质量、能量和动量守恒律确定；激波层的厚度正好可以给出这些守恒律所要求的熵的增加.

激波中熵的增加，对运动还有另一个重要影响，就是说，即使

激波前面是势流，激波后面一般也是有旋的．我们将在§106中重新讨论这个问题．

§83. 弱激波

现在来考虑每个量的间断值都很小的这种激波，我们称之为弱激波．将关系式(82.9)变换一下形式，即按小的差值 s_2-s_1 和 p_2-p_1 的幂次展开．我们将看到，p_2-p_1 的一阶和二阶项可以消去，因此，对于 p_2-p_1 而言，这个展开式必须精确到三阶项．而对于 s_2-s_1 而言，在这个展开式中只须保留一阶项．因而有

$$w_2-w_1=\left(\frac{\partial w}{\partial s_1}\right)_p(s_2-s_1)+\left(\frac{\partial w}{\partial p_1}\right)_s(p_2-p_1)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p_1^2}\right)_s(p_2-p_1)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial p_1^3}\right)_s(p_2-p_1)^3.$$

由热力学恒等式 $dw=Tds+Vdp$，我们有导数

$$\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_p=T,\qquad \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_s=V.$$

于是

$$w_2-w_1=T_1(s_2-s_1)+V_1(p_2-p_1)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_s(p_2-p_1)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s(p_2-p_1)^3.$$

比容 V_2 只需对 p_2-p_1 展开，因为方程(82.9)的第二项已经包含小的差值 p_2-p_1，而对于 s_2-s_1 的展开式，会出现 $(s_2-s_1)(p_2-p_1)$ 形式的不重要的项，所以

$$V_2-V_1=\left(\frac{\partial V}{\partial p_1}\right)_s(p_2-p_1)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s(p_2-p_1)^2.$$

把这个展开式代入(82.9)得

$$s_2-s_1=\frac{1}{12T_1}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_1^2}\right)_s(p_2-p_1)^3. \tag{83.1}$$

因而相对于压力间断来说，弱激波中熵的间断是三阶小量．

在已经研究过的所有情况下，压缩系数$-(\partial V/\partial p)_s$都是随压力的增加而减小的，即二阶导数

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0. \tag{83.2}$$

但应强调指出：这不是热力学关系式，而且不能以热力学为依据而导出．所以，原则上，这个导数为负值也许是可能的．后面将不只一次地看到，导数$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$的符号在气体动力学中是很重要的．下面我们假设它是正数①．

在pV平面上通过点$1(p_1, V_1)$画出两条曲线：激波绝热曲线和泊松绝热曲线．泊松绝热曲线方程为$s_2-s_1=0$．把它与激波绝热方程(83.1)在点1邻近进行比较，可以看出，这两条曲线在这点是二阶相切的，即它们的一阶导数和二阶导数都相等．为了决定这两条曲线在点1邻近的相对位置，我们利用以下事实：根据(83.1)和(83.2)，在激波绝热曲线上，若$p_2>p_1$，必定有$s_2>s_1$，而在泊松绝热曲线上，则有$s_2-s_1=0$．所以，如果两曲线上的点的纵坐标p_2相等，则激波绝热曲线上的点的横坐标一定大于泊松绝热曲线上的点的横坐标．这一结论可由下述事实立即得出，即按照熟知的热力学公式

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

可知：对于受热膨胀即$(\partial V/\partial T)_p$为正的所有物质而言，在定压情况下，熵随比容的增加而增加．仿此可以推知，若$p_2<p_1$，则泊松绝热曲线上点的横坐标大于激波绝热曲线上相应点的横坐标．因而在切点邻近，这两条曲线的相对位置如图45所示（HH'是激波

---

① 对于理想气体，则

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s = \frac{\gamma+1}{\gamma^2}\frac{V}{p^2},$$

求取这个式子的最简单方法，是对泊松绝热方程$pV^\gamma=$常数进行微分．

绝热曲线，PP' 是泊松绝热曲线)①，由(83.2)可知，这两条曲线都是上凹的.

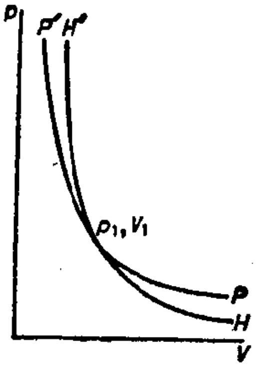


图 45

如果 p_2-p_1 和 V_2-V_1 都小，在一级近似下，公式(82.6)可写成 $j^2=-(\partial p/\partial V)_s$（我们取等熵情况下的导数，因为在点 1 处，这两条绝热曲线的切线重合）. 在同样的近似程度内，速度 v_1 和 v_2 相等:

$$v_1=v_2=v=jV=\sqrt{-V^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s}=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$

这正好是声速 c. 因而在一级近似下，弱激波的传播速度就是声速

$$v=c. \tag{83.3}$$

根据上面所得到的邻近点 1 的激波绝热曲线的性质，可以推出一些重要的结果. 因为在激波中，一定有 $s_2>s_1$，由此得出 $p_2>p_1$，即点 $2(p_2,V_2)$ 一定位于点 1 的上面. 此外，因为弦 12 的斜率大于点 1 处绝热曲线切线的斜率(图 43)，而该切线的斜率等于导数$\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1}$，因而有

$$j^2>-\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1}.$$

将此不等式的两边同乘以 V_1^2，我们得

$$j^2V_1^2=v_1^2>-V_1^2\left(\frac{\partial p}{\partial V_1}\right)_{s_1}=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho_1}\right)_{s_1}=c_1^2,$$

这里 c_1 是对应于点 1 处的声速. 所以 $v_1>c_1$. 最后，由于弦12 的斜率小于点 2 处切线的斜率，按同样的方法可以求得 $v_2<c_2$②.

① 若$(\partial V/\partial T)_p$ 是负的，则相对位置相反.

② 按同样的方法不难证明: 若导数$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$为负，则对弱激波而言，$s_2>s_1$ 的条件包含 $p_2<p_1$，而速度仍满足 $v_1>c_1$，$v_2<c_2$.

§84. 激波中诸物理量变化的方向

根据§83的结果，如果设导数$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s$为正，则可以很简单地证明：对弱激波而言，熵增加的条件($s_2>s_1$)必然是指

$$p_2>p_1, \tag{84.1}$$

$$v_1>c_1, \qquad v_2<c_2. \tag{84.2}$$

由有关(82.6)所作的说明可知，若$p_2>p_1$，则

$$V_1>V_2, \tag{84.3}$$

又因为

$$\frac{v_1}{V_1}=\frac{v_2}{V_2}=j,$$

故还有

$$v_1>v_2. \tag{84.4}$$

我们现在来证明，这些不等式对任意强度的激波，实际上都是成立的$\left[\text{仍设}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s\text{为正}\right]$. 因此，可得出具体结论：气体穿过激波时受到压缩，压力和密度增加(E. 儒盖特，1904，G. 曾普伦，1905)①. 从图上看，这意味着激波绝热曲线只有上半分支（点1上方）才有实际意义；而对应于下半分支各点的激波是不能存在的. 我们还可指出，由不等式(84.2)可以得出下面的重要结果. 因为激波相对于它前面的气体以速度$v_1>c_1$运动，所以很明显，由激波发出的扰动决不可能进入到气体1中去. 换句话说，激波的存在，对它前面的气体状态没有影响.

现在我们来证明这些论断，先从预备性的计算开始. 我们将

① 如果我们把坐标系变换一下，使气体1（在激波前面）在该坐标系中是静止的，而激波是运动的，则不等式$v_1>v_2$意味着激波后面的气体与激波本身都朝相同的方向运动（速度为v_1-v_2）.

关系式(82.5)和(82.8)对属于气体2的各量进行微分，而假设气体1的状态不变．这意味着把p_1, V_1和w_1当作常数，而对p_2, V_2, w_2以及j(它依赖于p_2和V_2)微分．由(82.5)得

$$V_1 d(j^2) = dp_2 + j^2 dV_2 + V_2 d(j^2),$$

或

$$dp_2 + j^2 dV_2 = (V_1 - V_2) d(j^2). \qquad (84.5)$$

而由(82.8)得

$$dw_2 + j^2 V_2 dV_2 = \frac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2) d(j^2),$$

或将微分dw_2展开，得

$$T_2 ds_2 + V_2 dp_2 + j^2 V_2 dV_2 = \frac{1}{2}(V_1^2 - V_2^2) d(j^2).$$

把这个方程代入(84.5)，我们得

$$T_2 ds_2 = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)^2 d(j^2). \qquad (84.6)$$

由此可见

$$\frac{d(j^2)}{ds_2} > 0, \qquad (84.7)$$

即j^2随s_2的增加而增加．

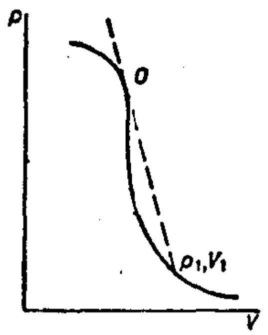


图 46

现在证明激波绝热曲线上不可能有这样的点，在这点上，该曲线与由点1画出的任一直线相切(如图46中的点O)．因为在这样的点上，由点1作出的弦的斜率为一极小值，因而j^2就有对应的极大值，所以$d(j^2)/dp_2 = 0$．由(84.6)可知，在这种情况下，也有$ds_2/dp_2 = 0$．再将微分dV_2的表达式$dV_2 = \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} dp_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2} ds_2$以及由(84.6)给出的$ds_2$代入(84.5)，并除以$dp_2$，就得到

$$1 + j^2 \left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2} = (V_1 - V_2)\left[1 - \frac{j^2(V_1 - V_2)}{T_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial s_2}\right)_{p_2}\right]\frac{d(j^2)}{dp_2}.$$

由此可见，若 $d(j^2)/dp_2=0$，则必定有

$$1+j^2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2}=1-\frac{v_2^2}{c_2^2}=0,$$

即 $v_2=c_2$；反之，若 $v_2=c_2$，可得 $\dfrac{d(j^2)}{dp_2}=0$①.

于是由

$$d(j^2)/dp_2=0, \quad ds_2/dp_2=0, v_2=c_2 \tag{84.8}$$

这三个方程中的每一个都可导出其它两个；并且在(图46)点 O 上，这三个方程都成立．最后，我们求得

$$j^2\left(\frac{\partial V_2}{\partial p_2}\right)_{s_2}=-\frac{v_2^2}{c_2^2}$$

在点 O 的导数为

$$\frac{d}{dp_2}\left(\frac{v_2^2}{c_2^2}\right)=-j^2\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial p_2^2}\right)_{s_2}.$$

由于假设 $(\partial^2 V/\partial p^2)_s$ 为正，所以，在点 O 上有

$$\frac{d(v_2/c_2)}{dp_2}<0. \tag{84.9}$$

现在容易证明：激波绝热曲线上不可能存在这样的点 O．因为在点 1 上方邻近的那些点上，$v_2/c_2<1$（参看 § 83 末）．所以方程 $v_2/c_2=1$ 只有在 v_2/c_2 有一增量时才能满足；也就是说，在点 O 处，必须有 $d(v_2/c_2)/dp_2>0$，然而，按(84.9)，却正好与此相反．用完全类似的方法，我们可以证明，在激波绝热曲线上点 1 的下方，v_2/c_2 也不可能变得等于 1.

刚才证明了不可能存在像 O 这样的点，据此，我们可以由激波绝热曲线图立即推知，由点 $1(p_1,V_1)$ 到点 $2(p_2,V_2)$，这根弦的斜率随着曲线上点的上移而减小，而 j^2 相应地增大．由激波绝热曲线的这一性质以及不等式(84.7)，立即知道必要条件 $s_2>s_1$ 也包含

① 方括号内表达式为零这种仅仅偶然的可能性勿需考虑.

$p_2 > p_1$.

还容易看出，在激波绝热曲线的上段，不等式$v_2 < c_2$，$v_1 > c_1$成立. 第一个不等式可由以下事实直接求得，即在点 1 邻近它是成立的，而比值 v_2/c_2 又决不可能变得等于 1. 第二个不等式是由以下事实求得的，即从点 1 到位于点 1 之上的点 2 的所有弦，都比点 1 处绝热曲线的切线更陡，因为这曲线不可能有像图 46 所示的那种形状.

所以，条件 $s_2 > s_1$ 和三个不等式(84.1)，(84.2)在激波绝热曲线的上段全都得到满足. 但在下段，这些条件一个也不成立. 所以它们彼此是等价的，因而，如果其中一个得到满足，则其它几个全都满足.

在上面的讨论过程中，我们处处假定导数$(\partial^2V/\partial p^2)_s$为正. 如果这个导数可以改变符号，则由 $s_2 > s_1$ 这一必要条件，就不再能得出有关其它各个量的不等式的普遍结论. 然而，重要的是，关于速度的不等式(84.2)可由完全不同的论证而得到；这就表明，不满足这些不等式的激波是不可能存在的，即使由上述纯热力学的论证并不能否定这种激波的存在.

为此，我们还必须讨论激波的稳定性问题. 设处于静止的激波(比如说)在垂直于自身平面的方向发生无穷小的位移. 可以证明，这一位移的结果，是激波沿某一方向不断加速. 很清楚，这显示了这种波的绝对不稳定性，因而它是不可能存在的.

激波的位移伴随着间断面两侧气体压力、速度等的无穷小扰动. 然后，激波附近的这些扰动以（相对于气体的）声速由激波处向外传播；但这不适用于熵的扰动，熵只能随气体本身一起传播. 因此，所讨论的这种类型的任意扰动，可认为是由激波两侧气体 1 和 2 中传播的若干声音扰动和一个熵的扰动所组成；后者随气体一起移动，显然只能在激波后面的气体 2 中出现. 在每一个声音

扰动中，各个量的改变都是由从运动方程求得的一定公式联系着(像在任何声波中那样，§63)，因此，任何这样的扰动只由一个参数确定.

现在来计算可能的声音扰动的数目. 这个数目取决于气体速度 v_1, v_2 和声速 c_1，c_2 的相对大小. 我们取气体运动的方向(从1到2)作为 x 轴的正向. 相对于驻激波而言，气体1中的扰动传播的速度为 $u_1=v_1\pm c_1$，而在气体2中为 $u_2=v_2\pm c_2$. 因为这些扰动必须由激波处向外传播，由此可得 $u_1<0, u_2>0$.

设 $v_1>c_1, v_2<c_2$，则 $u_1=v_1\pm c_1$ 这两个值显然都是正的，而 u_2 的两个值中只有 v_2+c_2 是正的. 这表明，我们所研究的声音扰动在气体1中不能存在；而在气体2中只能有一个，它相对于气体以速度 c_2 传播. 在其它情况下，计算方法是类似的.

其结果表示在图47中，图中每个箭头对应于一个声音扰动，它相对于气体沿箭头所示的方向传播. 如上所述，每个声音扰动，各由一个参数确定. 此外，在所有这四种情况下，还有另外两个参数，一个参数确定在气体2中传播的熵的扰动，一个参数确定激波的位移. 图47中四种情况的每一种，各以圆圈中的数字表示这样得到的参数的总数目，这些参数确定了由激波位移所引起的任意扰动.

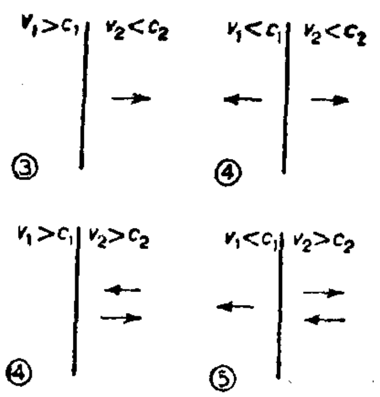


图 47

扰动在间断面上所必须满足的边界条件有三个(质量通量、能量通量和动量通量的连续性). 求解稳定性问题是用下述办法实现的，即将激波的位移(因而其余各量的扰动也都这样)写成正比于 $e^{\Omega t}$ 的形式，而用边界条件确定 Ω 可能的值；Ω 的正实数值的存

在，表明绝对不稳定性。图 47 中所示的各种情况，除第一种情况以外，已有的参数数目全都超过了间断面上边界条件所给定的方程的数目. 因此，在这些情况下，边界条件允许Ω取任何值（因而可取任何正值），所以激波是绝对不稳定的. 但在$v_1>c_1$，$v_2<c_2$的情况下，参数的数目正好等于方程的数目，因而这些方程给出确定的Ω值. 很明显，毋须写出这些方程就可知道这个值一定是$\Omega=0$，因为这个问题中根本不会含有量纲为[秒]$^{-1}$的参数，这种参数可以确定Ω为非零值，但不是任意的值. 所以，在这种情况下，不存在这样的不稳定性.

由此可见，不管气体的热力学性质如何，激波速度的不等式(84.2)对于激波的存在是必要的.

为了决定满足条件 (84.2) 的激波的稳定性，我们还必须研究其它可能类型的不稳定性. 其中之一是研究在 § 30中所讨论的那种类型扰动的不稳定性（其特征是在平行于间断面方向具有周期性，并在间断面上形成“皱纹”). 在这里，我们将不进行这种计算，而只是说明，对于这种类型的扰动，激波几乎总是稳定的. 不稳定性只能在某种形状非常特别的激波绝热曲线情况下出现. 看来，这种情况在自然界中几乎是从不存在的；它们全都要求导数$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p_2}\right)_s$的符号可变①.

就激波分裂成两个或两个以上的间断面这一点来说，原则上，激波也可能是不稳定的. 这个问题尚未进行适当的研究；不过，这种不稳定性，可能也只在某些形状非常特别的激波绝热曲线情况下出现.

---

① 参看 С. П. ДЬЯКОВ, *Ж. Э. Т. Ф.*, **27**, 288, 1954; В. М. Конторович, *Ж. Э. Т. Ф.* **33**, 1525, 1957; Soviet Physics, *JETP*, 6(33), 1179, 1958.

§ 85. 理想气体中的激波

我们把前面几节求得的普遍关系式用于理想气体中的激波. 理想气体的焓由简单公式 $w=\gamma pV/(\gamma-1)$ 给出. 把此式代入 (82.9), 经过简单换算后, 可得

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2}. \qquad (85.1)$$

利用这个公式, 可以由 p_1, V_1, p_2, V_2 这四个量中的任意三个量确定另外一个量. 比率 V_2/V_1 是比率 p_2/p_1 的单调递减函数, 趋向于有限的极限 $(\gamma-1)/(\gamma+1)$. 图48是 p_1, V_1 给定时, p_2 随 V_2 变化的曲线(激波绝热曲线). 这是一支直角双曲线, 它以 $V_2/V_1=(\gamma-1)/(\gamma+1)$, $p_2/p_1=-(\gamma-1)/(\gamma+1)$ 为渐近线. 我们知道, 只有曲线的上段, 即点 $V_2/V_1=p_2/p_1=1$ 以上部分才有实际意义; 在图 48中 $(\gamma=1.4)$, 这上段用实线表示.

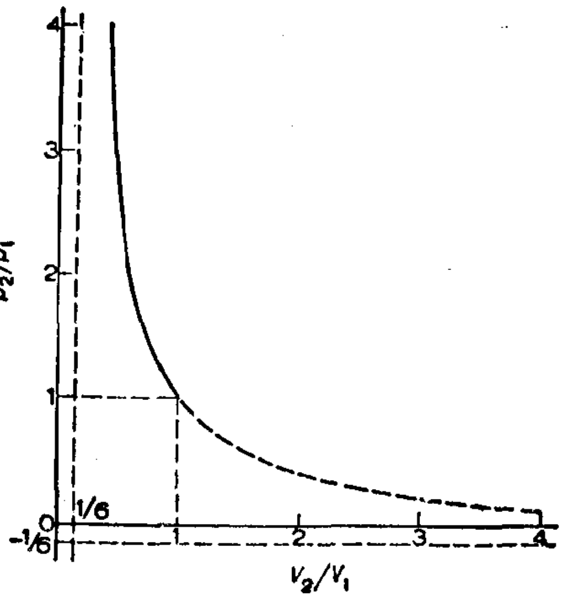


图 48

关于间断面两侧的温度比, 由理想气体的状态方程 $T_2/T_1=p_2V_2/p_1V_1$, 求得

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}\frac{(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2}. \tag{85.2}$$

由(82.6)和(85.1)，可求得通量密度 j 为

$$j^2=\frac{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2}{2V_1}, \tag{85.3}$$

因而激波相对于其前后气体的传播速度分别为

$$\left.\begin{aligned} v_1^2&=\frac{V_1}{2}[(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2],\\ v_2^2&=\frac{V_1}{2}\frac{[(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2]^2}{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2}.\end{aligned}\right\} \tag{85.4}$$

现在可以推导很强激波的极限结果，这时 p_2远大于 $p_1$①. 由(85.1)和(85.2)，得

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad \frac{T_2}{T_1}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cdot\frac{p_2}{p_1}. \tag{85.5}$$

比值 T_2/T_1 随 p_2/p_1一起增至无穷大，也就是说，激波中的温度间断与压力间断类似，可达任意大的值. 但密度比趋向于常数极限；例如，对单原子气体，这个极限是 $\rho_2=4\rho_1$，而对双原子气体，$\rho_2=6\rho_1$. 强激波的传播速度为

$$v_1=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}p_2V_1} \qquad v_2=\sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)}p_2V_1}. \tag{85.6}$$

它们按与压力 p_2 平方根成正比的规律而增大.

最后，我们给出几个有用的公式，这些公式用马赫数 $\mathrm{M}_1=v_1/c_1$ 表示激波两侧密度、压力和温度的比值. 由前面的结果不难求得这些公式:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{(\gamma+1)\mathrm{M}_1^2}{(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2+2}, \tag{85.7}$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\mathrm{M}_1^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \tag{85.8}$$

① 不仅要求 $p_2\gg p_1$，而且要求 $p_2\gg(\gamma+1)p_1/(\gamma-1)$.

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{[2\gamma M_1^2-(\gamma-1)][(\gamma-1)M_1^2+2]}{(\gamma+1)^2 M_1}. \qquad (85.9)$$

马赫数 M_2 可用马赫数 M_1 表示为

$$M_2^2=\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}. \qquad (85.10)$$

问　　题

问题 1. 试推导公式

$$v_1v_2=c_*^2,$$

其中 c_* 是临界速度.

解: 因为 $w+\frac{1}{2}v^2$ 在激波上是连续的,所以可用公式

$$\frac{\gamma p_1}{(\gamma-1)\rho_1}+\frac{1}{2}v_1^2=\frac{\gamma p_2}{(\gamma-1)\rho_2}+\frac{1}{2}v_2^2=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}c_*^2$$

来定义临界速度,该临界速度对气体 1 和 2 是相同的, 参看(80.7). 由上式定出 p_2/ρ_2 和 p_1/ρ_1,并代入

$$v_1-v_2=\frac{p_2}{\rho_2v_2}-\frac{p_1}{\rho_1v_1}$$

(此式由(82.1)和(82.2)联立求得),我们得

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma}(v_1-v_2)\left(1-\frac{c_*^2}{v_1v_2}\right)=0.$$

因为 $v_1\neq v_2$,故上式给出所要求的关系式.

问题 2. 设在变比热理想气体的间断面上, 已知温度 T_1, T_2,试求 p_2/p_1 的比值.

解: 在变比热理想气体的一般情况下, 我们只能说, w (和 ϵ 一样)只是温度的函数, 而 p, V 和 T 由状态方程 $pV=RT/\mu$ 相联系. 解方程(82.9)求 p_2/p_1,得

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{\mu}{RT}(w_2-w_1)-\frac{T_2-T_1}{2T_1}+\sqrt{\left[\frac{\mu(w_2-w_1)}{RT_1}-\frac{T_2-T_1}{2T_1}\right]^2+\frac{T_2}{T_1}},$$

其中, $w_1=w(T_1)$, $w_2=w(T_2)$.

问题 3. 设理想气体中,有一平面声波与一激波正面相遇,试确定通过激

波透射的声音的强度(Д. И. 布洛欣采夫, 1945)①.

解: 因为激波相对于它前面的气体以超声速传播，所以不会有声波从激波上反射出来. 在间断面后面的气体 2 中，有通常的等熵透射声波传播; 并且还有(定压下)熵的扰动随运动气体本身一起传播.

我们采取这样的坐标系来研究这个过程: 在这坐标系中，激波是静止的，而气体沿 x 轴的正向穿过激波，入射声波也沿着这个方向传播. 间断面两侧的扰动，由变更边界条件(82.1)—(82.3)所得的条件互相联系. 由于声音扰动的结果，激波也开始振动; 我们用 δu 表示激波的振动速度，于是边界条件中速度 v_1, v_2 的改变必须写成 $\delta v_1-\delta u, \delta v_2-\delta u$. 所以有②

$$v_1\delta\rho_1+\rho_1(\delta v_1-\delta u)=v_2\delta\rho_2+\rho_2(\delta v_2-\delta u),$$

$$\delta p_1+v_1^2\delta\rho_1+2\rho_1 v_1(\delta v_1-\delta u)$$
$$=\delta p_2+v_2^2\delta\rho_2+2\rho_2 v_2(\delta v_2-\delta u),$$

$$\delta w_1+v_1(\delta v_1-\delta u)=\delta w_2+v_2(\delta v_2-\delta u).$$

在入射声波中，有

$$\delta s_1=0, \quad \delta v_1=\frac{c_1}{\rho_1}\delta\rho_1=\frac{\delta p_1}{c_1\rho_1}, \quad \delta w_1=\frac{\delta p_1}{\rho_1}.$$

介质 2 中的扰动由声波和“熵波”组成，我们分别用一撇和两撇来表示这两个扰动:

$$\delta s_2'=0, \quad \delta v_2'=\frac{c_2}{\rho_2}\delta\rho_2'=\frac{\delta p_2'}{c_2\rho_2}, \quad \delta w_2=\frac{\delta p_2'}{\rho_2},$$

$$\delta p_2''=0, \quad \delta v_2''=0, \quad \delta w_2''=T_2\delta s_2''=-\frac{c_2^2\delta\rho_2''}{\rho_2(\gamma-1)},$$

(理想气体的 $(\partial s/\partial\rho)_p=-c_p/\rho$).

这些关系式使我们能够用入射波中的各个量来表示透射波中相应的量. 于是求得声波中压力比为

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1}=\frac{M_1+1}{M_2+1}\,\frac{2(\gamma-1)M_1M_2^2(M_1^2-1)-(M_1+1)[(\gamma-1)M_1^2+2]}{2(\gamma-1)M_2^2(M_1^2-1)-(M_2+1)[(\gamma-1)M_1^2+2]}.$$

若是弱激波 $(p_2-p_1\ll p_1)$，则得

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1}\approx 1+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\,\frac{p_2-p_1}{p_1},$$

---

① 任意介质中，声音斜射到激波上这样更普遍问题的解法，可参看 В. М. Конторович, Ж. Э. Т. Ф., **33**, 1527, 1957; *Soviet Physics JETP*, 6(**33**), 1180, 1958.

② 这里我们用 δ 表示量的可变部分，而不像通常那样用一撇.

而在相反的强激波的极限情况下，则有

$$\frac{\delta p_2'}{\delta p_1} \approx \frac{1}{\gamma+\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}} \frac{p_2}{p_1}.$$

在这两种情况下，透射波中压力的幅度都大于入射波中压力的幅度.

§86. 斜激波

我们来研究定常激波，并放弃迄今所沿用的坐标系，以前的情形是气体速度垂直于所讨论的激波面元. 现在，流线可以与该激波面以任意角度相交①；并且，相交以后，流线发生"折射"：气体速度的切向分量不变，而根据(84.4)，法向分量是减小的，即

$$v_{1t}=v_{2t}, v_{1n}>v_{2n}.$$

因此，穿过激波以后，流线显然是向激波"靠扰"的(参看图 49). 于是，穿过激波时，流线总是沿一定的方向折射.

激波后面的运动，既可以是超声速的，也可以是亚声速的(只是法向速度分量必须低于声速 c_2)；激波前面的运动必须是超声速的. 若激波两侧的气流都是超声速的，则每一种扰动都必定沿气体速度切向分量的方向顺着激波面传播. 在这种意义上，我们可以谈论激波的"方向"并可以区别从某点发出的激波与到达某点的激波(像我们对特征线所做的那样，因为特征线附近的运动总是超声速的；参看 § 79). 若激波后面的运动是亚声速的，则严格地说，谈论激波的"方向"就没有意义了，因为扰动可以在其表面上沿所有方向传播.

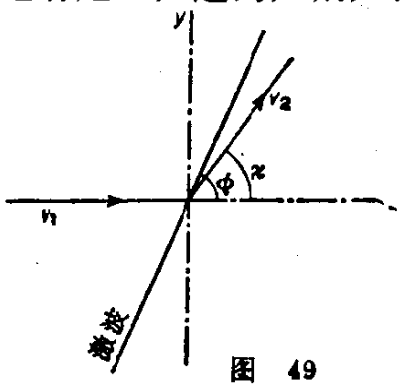


图 49

现在来推导气体穿过斜激波以后两个速度分量之间的关系，我们假设气体是理想气体. 取激

① 唯一的限制是其法向速度分量 v_{1n} 要大于声速 c_1.

波前面气体速度 v_1 的方向为 x 轴方向；令 ϕ 为激波与 x 轴的夹角(图49). 与激波相切的速度分量的连续性意味着 $v_1\cos\phi=v_{2x}\cos\phi+v_{2y}\sin\phi$，或

$$\mathrm{tg}\,\phi=(v_1-v_{2x})/v_{2y}. \tag{86.1}$$

下面，我们利用公式(85.7)；该式中，v_1 和 v_2 表示垂直于激波平面的两个速度分量，因而现在要用 $v_1\sin\phi$ 和 $v_{2x}\sin\phi-v_{2y}\cos\phi$ 代替，故有

$$\frac{v_{2x}\sin\phi-v_{2y}\cos\phi}{v_1\sin\phi}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{2c_1^2}{(\gamma+1)v_1^2\sin^2\phi}. \tag{86.2}$$

我们可以从以上两式中消去角 ϕ. 经过一些简单的换算，可得到确定 v_{2x} 与 v_{2y} 关系(v_1 和 c_1 给定时)的下列公式：

$$v_{2y}^2=(v_1-v_{2x})^2\frac{\dfrac{2}{\gamma+1}\left(v_1-\dfrac{c_1^2}{v_1}\right)-(v_1-v_{2x})}{v_1-v_{2x}+\dfrac{2}{\gamma+1}\cdot\dfrac{c_1^2}{v_1}}. \tag{86.3}$$

引进临界速度，可将上式写得更加简明. 根据伯努利方程和临界速度的定义，我们有（参看§85 问题 1）$w_1+\frac{1}{2}v_1^2=\frac{1}{2}v_1^2+\frac{c_1^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}c_*^2$，于是有

$$c_*^2=\frac{(\gamma-1)v_1^2+2c_1^2}{\gamma+1}. \tag{86.4}$$

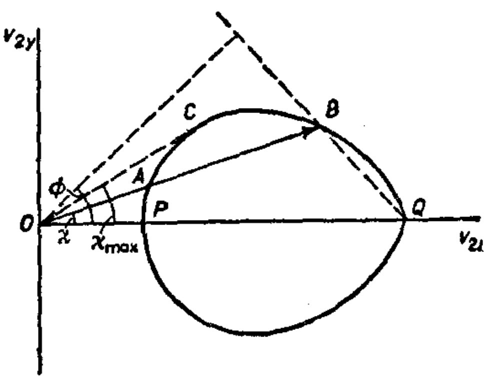


图 50

将此式用于(86.3)，即得

$$v_{2y}^2=(v_1-v_{2x})^2\frac{v_1v_{2x}-c_*^2}{\dfrac{2}{\gamma+1}v_1^2-v_1v_{2x}+c_*^2}. \tag{86.5}$$

方程(86.5)称为**激波极线**方程. 图 50 给出函数 $v_{2y}(v_{2x})$ 的曲线图. 这是个三次曲线，称为环索线. 它穿过横坐标上的点 P 和 Q，

这两点分别对应于 $v_{2x}=c_*^2/v_1$ 和 $v_{2x}=v_1$①. 从原点出发，画一条与横坐标轴夹角为 χ 的直线(图 50 中的 OB)，则由点 O 至该直线与激波极线交点之间线段的长度，就给出间断面后面气体的速度，该间断面使气流折转一个角度 χ. 这样的交点有两个(A, B)，即对应于一个给定的 χ 值，有两个不同的激波. 由激波极线也可立即确定出激波的方向：它由从原点到直线 QB 或 QA 的垂线的方向给出(图 50 中只画出对应于点 B 激波的角 ϕ). 随着 χ 的减小，点 A 趋向点 P，而点 P 则对应于正激波$\left(\phi=\frac{\pi}{2}\right)$，其速度 $v_2=c_*^2/v_1$. 同时，点 B 趋向点 Q，激波强度(速度间断值)趋于零，而角 ϕ 当然也就趋于马赫角 $\alpha=\arcsin\frac{c_1}{v_1}$；激波极线上 Q 点的切线与横坐标轴夹角为 $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

由激波极线可立即得到一个重要结果，即在激波上气流的偏转角 χ 不能超过某个最大值 $\chi_{\max}$，这对应于从 O 到激波极线的切线. 当然，这个量是马赫数 $M_1=v_1/c_1$ 的函数，但因为式子很繁，我们就不写出这个表达式了. 若 $M_1=1$，则 $\chi_{\max}=0$；随着 M_1 增加，$\chi_{\max}$ 单调递增，而当 $M_1\to\infty$ 时，它趋向于一个有限的极限. 很容易讨论两种极限情形. 若速度 v_1 接近于 c_*，则 v_2 也接近于 c_*，并

① 实际上，环索线从点 $v_{2x}=v_1$ (这是个二重点)开始还有两个分支继续伸展，使 v_{2y} 趋于无穷大；图 50 中没有画出这两个分支. 它们有一条共同的渐近线

$$v_{2x}=\frac{c_*^2}{v_1}+\frac{2v_1}{\gamma+1}.$$

这两个分支上的点没有物理意义*；它们给出的 v_{2x} 和 v_{2y} 值将使 $v_{2n}/v_{1n}>1$，而这种情形是不可能的.

* 不过，在斜激波从平壁上作规则反射的情况下，落在分支上的点、二重点和落在封闭曲线上的点，可用来分别表示对应于入射激波前、入射激波后以及反射激波后的气流速度. 比如见 R. Courant and K. D. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New York, 1948, § 125. ——中译者注

且角χ很小；于是激波极线方程(86.5)可近似地写为①

$$\chi^2=(\gamma+1)(v_1-v_2)^2(v_1+v_2-2c_*)/2c_*^3, \qquad (86.6)$$

由于χ很小，这里已令$v_{2x}\approx v_2, v_{2y}\approx c_*\chi$. 因而容易得出②

$$\chi_{max}=\frac{4\sqrt{\gamma+1}}{3\sqrt{3}}\left(\frac{v_1}{c_*}-1\right)^{3/2}=\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}(\gamma+1)}(M_1-1)^{3/2}. \qquad (86.7)$$

在$M_1=\infty$(即$M_{1*}=\sqrt{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$)这一相反的极限情况下，激波极线退化成一个圆，此圆与横坐标轴的交点为$c_*\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$和$c_*\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$. 容易看出，这时有

$$\chi_{max}=\arcsin\frac{1}{\gamma}; \qquad (86.8)$$

空气的这个值是45.6°. 图51给出了空气的χ_{max}随M_1变化的曲线图；上面一条曲线是绕圆锥流动的类似曲线(参看§105).

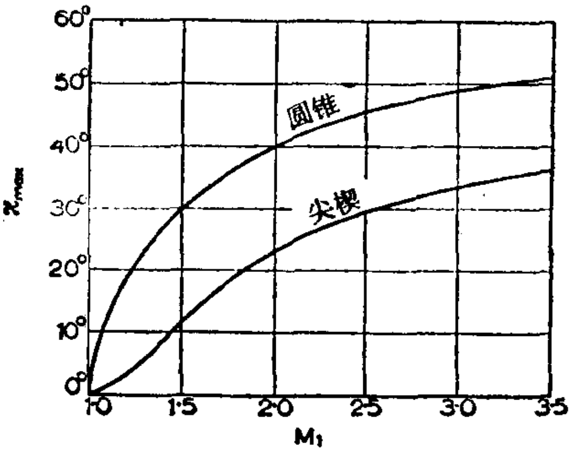


图 51

圆$v_2=c_*$在点P与Q之间与横坐标轴相交(图50)，因而把激波极线分成两部分，分别对应于间断面后面的气体速度为亚声

① 容易看出，只要用(95.2)式的$2\alpha_*$代替$(\gamma+1)$，则对于任何(非理想)气体，方程(86.6)也是成立的.

② 应注意，χ_{max}对M_1-1这种依赖关系与跨声速流的一般相似律(118.7)是吻合的.

速和超声速的情形. 这个圆与极线的交点位于点C的右边，但很靠近点C；所以，整个PC段对应于转变到亚声速的速度，而CQ段(除点C邻近的一小段以外)对应于转变到超音速的速度.

对于给定的M_1和ϕ，激波中压力变化由下式给出：

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma\mathrm{M}_1^2\sin^2\phi-(\gamma-1)}{\gamma+1}; \tag{86.9}$$

上式就是将公式(85.8)中的M_1换成$\mathrm{M}_1\sin\phi$后的公式. 当角ϕ从最小值$\arcsin(1/\mathrm{M}_1)$(这时$p_2/p_1=1$)增大到$\pi/2$，即沿激波极线从Q移至P时，这个压力比是单调增加的.

偏转角χ给定时，通常就说，激波极线所确定的两个激波属于**弱族**和**强族**. 强族激波(极线的PC段)较强(压力比p_2/p_1较大)，它与速度$\boldsymbol{v}_1$方向的夹角ϕ较大，并使流动由超声速转变成亚声速. 弱族激波(QC段)较弱，对气流的倾角较小，且几乎总是使流动保持为超声速的.

问　　题

问题 1. 对于理想气体中的斜激波，试导出用$M_1=v_1/c_1$和激波与速度$\boldsymbol{v}_1$方向的夹角ϕ(图49)表示的速度偏转角χ的公式：

$$\mathrm{ctg}\,\chi=\mathrm{tg}\,\phi\left[\frac{(\gamma+1)\mathrm{M}_1^2}{2(\mathrm{M}_1^2\sin^2\phi-1)}-1\right].$$

问题 2. 试导出用M_1和ϕ表示马赫数$\mathrm{M}_2=v_2/c_2$的公式：

$$\mathrm{M}_2^2=\frac{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2}{2\gamma\mathrm{M}_1^2\sin^2\phi-(\gamma-1)}+\frac{2\mathrm{M}_1^2\cos^2\phi}{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2\sin^2\phi}.$$

§87. 激波的厚度

到目前为止，我们都是把激波看作是厚度为零的几何曲面，现在来研究实际间断面的结构；我们将会看到，间断值较小的激波实际上是有限厚度的过渡层，其厚度随间断值的增加而减小. 如果间

断值不是小量，则变化非常急剧，以致厚度的概念失去了意义.

为了确定过渡层的结构和厚度，必须考虑气体的粘性和导热性，在此以前，这些一直是忽略不计的.

激波关系式(82.1)—(82.3)是由质量通量、动量通量和能量通量的不变性求得的. 如果把间断面看作是有限厚度的一层，则这些条件就不应写成间断面两侧有关量的等式，而应写成在这一层的整个厚度上的有关量恒定不变. 第一个条件是(82.1)不变：在

$$\rho v \equiv j = \text{常数}. \tag{87.1}$$

另外两个条件中，则必须考虑由内摩擦和导热引起的附加的动量通量和能量通量.

由内摩擦引起的（x 方向的）动量通量密度由粘性应力张量 $-\sigma'_{xx}$ 给出，按照这个张量的一般表达式（15.3），我们有 $\sigma'_{xx}=\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\frac{dv}{dx}$. 因而条件(82.2)变为

$$p+\rho v^2-\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\frac{dv}{dx}=\text{常数}.$$

像在 § 82 中那样，引进比容 V 以代替速度 $v=jV$，因为 $j=$常数，$\frac{dv}{dx}=j\frac{dV}{dx}$，所以

$$p+j^2V-\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)j\frac{dV}{dx}=\text{常数}.$$

在离激波较远处，热力学量是常数，即它们与 x 无关；特别是 $\frac{dV}{dx}=0$. 我们用下标 1 表示激波前面远处各个量的值，因而可令常数等于 $p_1+j^2V_1$，于是得

$$p-p_1+j^2(V-V_1)-\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)j\frac{dV}{dx}=0. \tag{87.2}$$

其次，由导热引起的能量通量密度是 $-\kappa\frac{dT}{dx}$. 由内摩擦引起的能量

通量密度是$-\sigma'_{xi}v_i$；或者是$-\sigma'_{xx}v=-\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)v\frac{dv}{dx}$，这是因为速度沿$x$轴方向．于是条件(82.3)可写为

$$\rho v\left(w+\frac{1}{2}v^2\right)-\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)v\frac{dv}{dx}-\kappa\frac{dT}{dx}=\text{常数}.$$

再令$v=jV$，可得最后形式：

$$w+\frac{1}{2}j^2V^2-j\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)V\frac{dV}{dx}-\frac{\kappa}{j}\frac{dT}{dx}=w_1+\frac{1}{2}j^2V_1. \tag{87.3}$$

现在来研究所有量的间断值都是小量的激波．这时，过渡层内、外各量的差值$V-V_1$，$p-p_1$等也都是小量．在(87.2)中，我们取压力和熵为独立变量，把$V-V_1$按$p-p_1$和$s-s_1$的幂次展开．由下面所得的关系式可知，$1/\delta$(这里δ是间断面的厚度)是$p-p_1$的一阶量，而差值$s-s_1$是二阶量①．因而略去三阶量后，可写出

$$V-V_1=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s(p-p_1)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s(p-p_1)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p(s-s_1).$$

当然，所有系数的值都是在过渡层外面取的(即$p=p_1$，$s=s_1$)．把这个表达式代入(87.2)，我们得

$$\left[1+\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s j^2\right](p-p_1)+\frac{1}{2}j^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s(p-p_1)^2$$
$$+\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p(s-s_1)j^2=\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)j\frac{dV}{dx}.$$

导数$\frac{dV}{dx}$可写为

$$\frac{dV}{dx}=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\frac{dp}{dx}+\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\frac{ds}{dx}.$$

---

① 由§83已经知道，相对于压力间断p_2-p_1而言，熵的总间断值s_2-s_1是三阶量，而$s-s_1$只是$p-p_1$的二阶量．其理由是：过渡层中压力从p_1单调地变到p_2，而熵并非单调变化的，它在过渡层中有个极大值，这在下文将要指出．

对 x 求微分使小量的阶次增加一阶，因为 $1/\delta$ 是一阶的；所以导数 $\frac{dp}{dx}$是二阶的，而$\frac{ds}{dx}$是三阶的．于是含$\frac{ds}{dx}$那一项可以略去．因而条件(87.2)变为

$$\left[1+\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s j^2\right](p-p_1)+\frac{1}{2}j^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p-p_1)^2$$

$$+\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p (s-s_1)^2=\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s \frac{dp}{dx}j. \tag{87.4}$$

其次，以$\frac{1}{2}(V+V_1)$乘(87.2)中的每一项，再从方程(87.3) 减去它．结果是

$$(w-w_1)-\frac{1}{2}(p-p_1)(V+V_1)-\frac{1}{2}j\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)(V-V_1)\frac{dV}{dx}$$

$$-\frac{\kappa}{j}\frac{dT}{dx}=0.$$

包含乘积$(V-V_1)\frac{dV}{dx}$的第三项是三阶的，可以略去，得

$$(w-w_1)-\frac{1}{2}(p-p_1)(V+V_1)-\frac{\kappa}{j}\frac{dT}{dx}=0.$$

这前两项正好是推导(83.1) 式时按 $p-p_1$ 和 $s-s_1$ 的幂次展开的表达式．在这个展开式中，$p-p_1$ 的一阶项和二阶项为零，精确到二阶项就只有$T(s-s_1)$．导数$\frac{dT}{dx}$可写为

$$\frac{dT}{dx}=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\frac{dp}{dx}+\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p\frac{ds}{dx}\approx\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\frac{dp}{dx}.$$

结果是

$$T(s-s_1)=\frac{\kappa}{j}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\frac{dp}{dx}. \tag{87.5}$$

将 $s-s_1$ 的这一表达式代入(87.4)，得

$$\frac{1}{2}j^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s (p-p_1)^2+\left[1+\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s j^2\right](p-p_1)$$

$$=\left[-\frac{\kappa}{T}\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s+\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right]\frac{dp}{dx}j. \qquad (87.6)$$

在一级近似程度下，通量 j 为 $j=v/V\approx c/V$[参看(83.3)]. 这个表达式可代入(87.6)的右边，但代入左边是不合适的；在 j^2 中还必须包括其它项. 例如，这些项可由(87.2) 求得. 但按以下办法讨论更为简单. 在间断面两边很远的地方，因为$\frac{dp}{dx}$为零，所以(87.6)的右边为零. 在这样的地方，压力为 p_1 或 p_2. 因而可以说(87.6)左边 p 的二次式有 p_1 和 p_2 两个根. 根据熟知的代数定理，这个二次式可写成$(p-p_1)(p-p_2)$之积乘以 p^2 的系数

$$\frac{1}{2}j^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s.$$

于是，我们有下列关于函数 $p(x)$ 的微分方程①:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s(p-p_1)(p-p_2)$$

$$=-\frac{V^3}{c^3}\left[\left(\frac{4}{3}\eta+\zeta\right)+\frac{\kappa}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p c^2\rho^2\right]\frac{dp}{dx}.$$

由导数的热力学公式，$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s$；易知上式右边$-\frac{dp}{dx}$的系数是 $2V^2a$，这里 a 与 (77.6)中声吸收系数 γ 的关系是$\gamma=a\omega^2$. 于是，

$$\frac{dp}{dx}=-\frac{1}{4V^2a}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s(p-p_1)(p-p_2). \qquad (87.7)$$

积分后得

$$x=-\frac{4V^2a}{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s}\int\frac{dp}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

① 在研究弱激波时，可把粘性系数和热导率看作常数.

$$=\frac{4aV^2}{\frac{1}{2}(p_2-p_1)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s}\operatorname{arctgh}\frac{p-\frac{1}{2}(p_2-p_1)}{\frac{1}{2}(p_2-p_1)}+常数$$

令这个常数等于零，得

$$p-\frac{1}{2}(p_2+p_1)=\frac{1}{2}(p_2-p_1)\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{\delta}\right), \tag{87.8}$$

其中

$$\delta=\frac{8aV^2}{(p_2-p_1)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s} \tag{87.9}$$

该式给出压力在值 p_1 和 p_2 之间变化的规律，这里 p_1 和 p_2 是激波两边远距离处的压力. 点 $x=0$ 对应于压力的中间值 $\frac{1}{2}(p_1+p_2)$. 当 $x\to\pm\infty$ 时，压力渐近地趋于 p_1 和 p_2. 从 p_1 到 p_2 的全部变化，几乎都是发生在 δ 量级的距离上，这 δ 可称为激波的**厚度**. 我们看到，激波越强，即压力间断值越大，这个厚度就越小.

由 (87.5) 和 (87.8) 可得穿过间断面熵的变化为

$$s-s_1=\frac{\kappa}{16caVT}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s(p_2-p_1)^2\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{\delta}}. \tag{87.10}$$

由此可见，熵不是单调变化的，而是在激波里面 $x=0$ 处有个最大值. 在 $x=\pm\infty$ 这两种情况下，这个公式都给出 $s=s_1$，这是因为熵的总变化量 s_2-s_1 是 p_2-p_1 的三阶量（参看(83.1)），而这里的 $s-s_1$ 是二阶的.

从定量上看，公式 (87.8) 只适用于差值 p_2-p_1 足够小的情形，但在差值 p_2-p_1 与 p_1 和 p_2 本身量级相同的情况下，我们可用 (87.9) 定性地确定这个厚度的量级. 气体中的声速与分子热运动速度 v 的量级是相同的. 由气体分子运动论，我们知道，运动粘性系数 $\nu\sim lv\sim lc$，这里，l 是分子的平均自由程. 因此，$a\sim l/c^2$；对

传热项作量级估计，也给出相同的结果．最后，还有$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s\sim\frac{V}{p^2}$和$pV\sim c^2$．将这些关系式用于(87.9)，得

$$\delta\sim l. \tag{87.11}$$

这样，强激波的厚度与气体分子平均自由程的量级是相同 的①．但在宏观的气体动力学中，气体是当作连续介质处理的，平均自由程必须取为零．由此可见，严格说来，不能单用气体动力学的方法来研究强激波的内部结构．

由于气体中存在比较缓慢的弛豫过程（缓慢的化学反应，分子不同的自由度之间缓慢的能量迁移等)，便可使激波厚度显著增加．这个问题已由 Я. Б. 泽尔多维奇(1946)研究过．

设τ为弛豫时间的量级．气体的初态和终态都必须是完全平衡态，因而，立即可知，激波的总厚度将是τv_1的量级，即在时间τ中气体走过的距离．由此还可知道，若激波强度超过某个极限，则其结构就变得更加复杂；这可由下面看出．

图 52 中的实曲线，是在假设气体的终态为完全平衡态的情况下，通过给定的初始点 1 所画出的激波绝热曲线．点 1 处切线的斜率确定了“平衡”声速，它在§78中用c_0表示．而虚线是在假设弛豫过程“被冻结”，因而根本不发生这种过程的情况下，通过同一点 1 所画出的激波绝热曲线．点 1 处该曲线切线的斜率确定了在§78 中记作c_∞的声速．

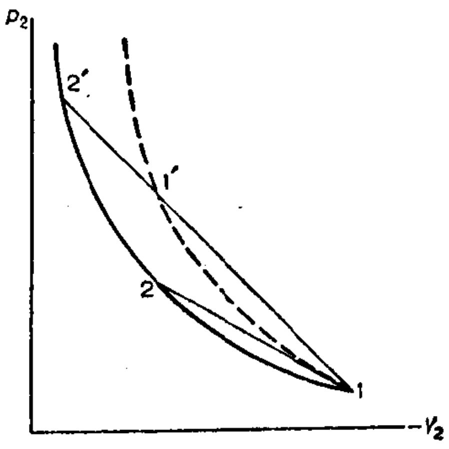


图 52

① 弱激波致使温度显著增加；而l代表激波中气体的某种平均温度下的平均自由程．

如果激波速度满足 $c_0<v_1<c_\infty$，则弦 12 位置如图 52（下面的弦）所示．在这种情况下，所得结果是激波厚度的单纯增加，而初态 1 和终态 2 之间所有的中间态均由 pV 平面中线段 12 上的点表示①．

但如果 $v_1>c_\infty$，则弦线取 $11'2'$ 的位置．1 与 $1'$ 之间决不会有对应于任何气体实际状态的点；（点 1 后面）第一个实际的点是 $1'$，它对应于这样一个状态，该状态中的弛豫平衡与状态 1 中的弛豫平衡没有差别．气体从状态 1 压缩到状态 $1'$ 是间断式的，以后（在 $\sim v_1\tau$ 的距离上）逐渐压缩到终态 $2'$．

§ 88. 等温间断面

在 § 87 中讨论激波结构时，曾假设粘性系数和热导率如通常那样，具有相同的量级．但 $\chi\gg\nu$ 的情形也是可能的．若温度足够高，则存在着由物质的平衡热辐射所传递的附加热量．辐射对粘性的影响（即动量传递）要小得多，所以 ν 与 χ 相比是个小量．我们将看到，这个不等式使激波结构产生重大差别．

略去粘性项，可将确定过渡层结构的方程 (87.2) 和 (87.3) 写为

$$p+j^2V=p_1+j^2V_1, \tag{88.1}$$

$$\frac{\kappa}{j}\frac{dT}{dx}=w+\frac{1}{2}j^2V^2-w_1-\frac{1}{2}j^2V_1^2. \tag{88.2}$$

(88.2)的右边只有在过渡层的边界上才为零．因为激波后面的温度一定高于激波前面的温度，所以在过渡层内处处都有

$$\frac{dT}{dx}>0, \tag{88.3}$$

① 这是由于（在略去通常的粘性和导热的情况下）气体经过的所有状态都满足质量守恒方程 $\rho v=j=$常数和动量守恒方程 $p+j^2V=$常数（参看 § 121 中类似的但更为详尽的讨论）。

即温度是单调递增的.

此层内所有的量都是单变量,即坐标 x 的函数,因而这些量互为函数关系. 将(88.1)对 V 求微分,得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\frac{dT}{dV}+\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T+j^2=0.$$

气体中. 导数 $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ 总是正的, 所以导数 $\frac{dT}{dV}$ 的符号与两项之和 $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T+j^2$ 的符号相反. 在状态 1 中, (因为 $v_1>c_1$) 有 $j^2>-\left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1}\right)_s$, 又因为绝热压缩系数总是小于等温压缩系数,故有 $j^2>-\left(\frac{\partial p_1}{\partial V_1}\right)_T$. 所以,在 1 这一侧, $\frac{dT_1}{dV_1}<0$. 如果这个导数在过渡层中处处都是负的,则当气体受到压缩(V 减小)时,从 1 侧到 2 侧, 温度单调递增,这与(88.3)相符. 换句话说,我们得到一个由于很高的热导率而使其厚度大为增加的激波 (可能达到这样的程度, 甚至仅仅是由于习惯上的原因才称它为激波).

但若激波很强,以致

$$j^2<-\left(\frac{\partial p_2}{\partial V_2}\right)_T,\qquad(88.4)$$

则在状态 2,有 $\frac{dT_2}{dV_2}>0$, 所以, 在 V_1 和 V_2 之间的某处, 函数 $T(V)$ 有个最大值 (图 53). 显然,由 V 连续改变而使气体从状态 1 转变到状态 2 就成为不可能了, 因为不等式(88.3)不能处处得到满足.

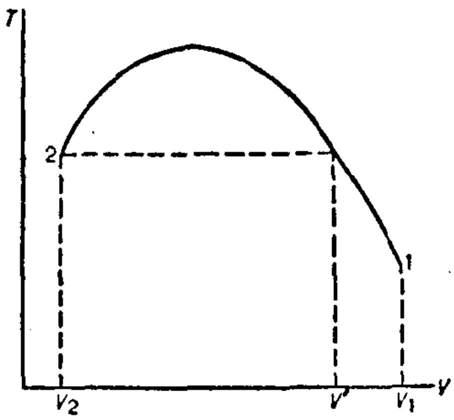


图 53

因此, 我们得到下列的从初态 1 转变到终态 2 的图象. 首先出现一个区域,在这区域中,气体由比容 V_1 逐渐压缩到某个 V'[V'

是第一次出现 $T(V')=T_2$ 的 V 值，参看图 53]；这个区域的厚度由热导率确定，并且可能相当大．然后，从 V' 压缩到 V_2 是间断式的，温度保持为 T_2 不变．这种间断称为**等温间断面**．

现在来确定等温间断面中压力和密度的变化，这里假设是理想气体．把动量通量连续条件(88.1)用于间断面的两侧，得 $p'+j^2V'=p_2+j^2V_2$．对于理想气体，$V=RT/\mu p$；因为 $T'=T_2$，于是有

$$p'+\frac{j^2RT_2}{\mu p'}=p_2+\frac{j^2RT_2}{\mu p_2}.$$

这个关于 p' 的二次方程有(平凡的)解 $p'=p_2$ 和解

$$p'=j^2\frac{RT_2}{\mu p_2}=j^2V_2, \qquad (88.5)$$

用(82.6)表示 j^2，得 $p'=(p_2-p_1)\dfrac{V_2}{V_1-V_2}$，再用(85.1)替换 V_2/V_1，我们有

$$p'=\frac{1}{2}[(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2]. \qquad (88.6)$$

因必有 $p_2>p'$，所以，只有当压力 p_2 和 p_1 的比值满足

$$\frac{p_2}{p_1}>\frac{\gamma+1}{3-\gamma} \qquad (88.7)$$

时，才会出现等温间断面(瑞利，1910)．当然，这个条件也可由(88.4)直接求得．

因为对于给定的温度而言，气体密度与压力成正比，所以，等温间断面中，密度比等于压力比，即

$$\frac{\rho'}{\rho_2}=\frac{V_2}{V'}=\frac{p'}{p_2}. \qquad (88.8)$$

§89. 弱间断面

除了量 $\rho, p, \boldsymbol{v}$ 等发生间断的那些间断面以外，还可以有这样的面，在这种面上，虽然这些量保持连续，但不是坐标的常规函数．

非常规性可以是各种各样的．例如，在面上，ρ,p,v 等对空间坐标的一阶导数可以是不连续的，或这些导数可以变成无穷大；或者它们的更高阶导数有上述性质．我们称这样的面为**弱间断面**，它与强间断面（激波和切向间断面）大不相同，强间断面中，ρ,p,v 等量本身是间断的．

经过简单的研究易知，弱间断面是相对于（间断面两边的）气体以声速传播的．因为，函数 ρ,p,v 等本身既然是连续的，我们只需在间断面邻近，而且只要用任意小的量，就可以把它们变成"光滑"的函数，只要使这样的光滑函数是没有奇异性的．于是，比如说，真正的压力分布可用根本没有奇异性的完全光滑函数 p_0 和间断面邻近处该分布的小扰动 p' 两者的叠加来表示；后者，像任何小扰动一样，是以声速相对于气体传播的．

应当强调，对激波而言，这样已修匀滑了的函数与真正函数之差通常不是小量，因此，上面的论据是不适用的．然而，若激波上的间断值足够小，上面的论据仍然可用，这样的激波是以声速传播的，这一结果已在 §83 中用另一种方法求得．

若在给定的坐标系中流动是定常的，则在该坐标系中间断面是静止的，而气体穿过间断面流动．垂直于间断面的气体速度分量必定等于声速．若用 α 表示气体速度方向与间断面的切平面之间的夹角，则 $v_n=v\sin\alpha=c$ 即 $\sin\alpha=c/v$，即弱间断面与流线的交角为马赫角．换句话说，弱间断面是特征面之一，只要我们回顾一下特征面的物理意义，即小扰动沿之传播的曲面（参看 §79），就可知道这一结果是完全合理的．显然，在气体的定常流动中，只有在气流速度不小于声速的条件下才能产生弱间断．

就弱间断面和强间断面的形成而论，二者有本质的差别．我们将看到，激波可由边界条件连续的气体流动直接形成（例如，在声波中激波的形成，§95）．与此相反，弱间断面不能自发地产生，它

们总是由于流动的初始或边界条件有某种奇异性而产生的. 这些奇异性可以是各种各样的,就像弱间断面本身那样. 例如,弱间断面可因被绕流物体表面上有尖角而产生;在这种情况下,速度对空间坐标的一阶导数是不连续的. 弱间断面也可以是当物体表面曲率不连续时形成的,而毋须有尖角存在;在这种情况下,速度对空间坐标的二阶导数是不连续的,如此等等. 最后,流动随时间变化的任何奇异性都会引起非定常的弱间断面.

与弱间断面相切的气体速度分量,其方向总是背离这种扰动点(例如物体表面上的尖角),而扰动是由这种扰动点开始并引起间断的;我们可以说,间断是从这点开始的. 这是超声速流动中扰动向下游传播的一个实例.

粘性和导热的存在,导致弱间断面具有一定厚度,因此,就像激波那样,它实际上是个过渡层. 但是激波厚度只依赖于它的强度,并不随时间变化;而弱间断面的厚度,则是随着该面形成之后的时间的增长而增加的. 我们不难确定这种增加的规律. 为此,我们再利用本节开头所作的说明,即弱间断面任何部分的运动,都是按照与气体中任意微弱扰动的传播相同的方程进行的. 当存在粘性和导热时,起初,集中在一个很小体积("波包")内的扰动随着时间的推移而扩展,这种扩展的规律已在 §77 中确定过. 因此,我们可以得出结论:弱间断面厚度 δ 的量级为

$$\delta \sim \sqrt{act}, \tag{89.1}$$

其中,t 是形成间断面以后所经过的时间,a 是声吸收系数中频率平方的系数. 若间断面是静止的,则时间 t 必须用 l/c 代替,这里,l 是从间断面始发点量起的距离(例如,对于由物体表面上的尖角引起的弱间断面,l 就是从尖角顶点量起的距离);因此

$$\delta \sim \sqrt{al}.$$

所以,弱间断面的厚度是按从形成间断面算起的时间的平方根规

律或从间断面始发点量起的距离的平方根的规律而增加的.

作为本节的结尾，我们应做类似于 §79 末尾的说明：在那里我们曾经指出，在运动气体状态的各种扰动之中，(定压下的)熵的扰动和涡量的扰动具有特殊的性质. 这两种扰动相对于气体是不动的，因而并不以声速传播. 所以，熵和涡量①具有弱间断的那些曲面相对于气体是静止的，而相对于固定坐标系，则随着气体一起移动. 这样的间断面可称为**切向弱间断面**；它们顺着流线伸展，在这点上，它们与切向强间断面是完全类似的.

① 涡量的弱间断是指与间断相切的速度分量具有弱间断；例如，速度的法向导数可以是间断的.

第十章　气体的一维流动

§ 90. 气体经过喷管的流动

现在来研究气体从大容器中经过变截面管道(**喷管**)流出的定常流动. 假设气体流动在管道的每一截面处是均匀的，并设速度沿着管轴. 由于这样，管道就不能太粗，同时管道的截面积 S 沿着管轴的变化也必须非常缓慢. 这样，所有表征流动的量就只是沿管轴坐标的函数. 在这些条件下，我们可以将 §80 中沿流线成立的各种关系式直接用于计算各量沿管轴的变化.

单位时间内气体流过管道截面的质量(**流量**)为 $Q=\rho vS$; 显然，Q 沿着管道应该是不变的，即

$$Q=S\rho v=\text{常数}. \tag{90.1}$$

假定容器的线尺度远大于管道的直径，因此容器中气体的速度可视为零，所以，在 §80 的公式中，凡是带下标"0"的各量，将是这些量在容器中的值.

我们已经知道，通量密度 $j=\rho v$ 不能超过某个极限值 j_*. 由此可见，总流量 Q 所有可能的值(对给定的管道和给定容器中的气体状态)有一个上限 Q_{max}，这个 Q_{max} 是很容易确定的. 如果该通量密度在管道最狭处以外的某个地方达到 j_* 的值，则较小的截面 S 上将有 $j>j_*$，但这是不可能的. 所以，该通量密度只能在管道的最狭处达到 $j=j_*$; 设管道最狭处的截面面积为 S_{min}，于是总流量的上限为

$$Q_{max}=\rho_* v_* S_{min}=\sqrt{\gamma p_0\rho_0}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}}S_{min}. \tag{90.2}$$

我们首先研究这样一种喷管，它向出口端逐渐变窄，因此，管道的最小截面面积在出口端(图 54). 根据式(90.1)，通量密度 j 将沿着管道单调增加. 气体速度也是单调增加的，而压力则是相应地单调下降. 在管道的出口端，如果 v 恰好达到 c 值，即 $v_1=c_1=v_*$(其中下标 1 表示各量在出口端的值)，则 j 就达到最大的可能值. 同时，有 $p=p_*$.

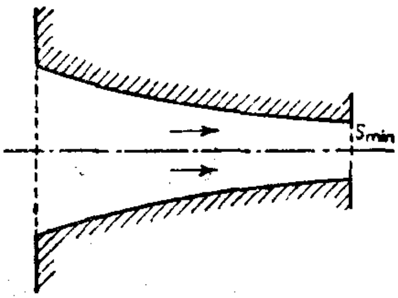


图 54

设外部压力 p_e 逐渐减少，我们来看看此时气体流出情况的变化. 当外部压力 p_e 从等于容器中的压力 p_0 减小到 p_* 时，出口端的压力 p_1 也是减小的，而且 p_1 和 p_e 这两个压力始终相等；也就是说，从 p_0 到 p_e 的全部压力降都发生在喷管内. 但是，气体离开管道的速度 v_1 和总流量 $Q=j_1S_{\min}$ 是单调增加的. 当 $p_e=p^*$ 时，速度 v_1 将等于当地声速，流量达到值 $Q_{\max}$. 当外部压力进一步减小时，压力 p_1 始终等于 p_* 不变，而从 p_* 到 p_e 的压力降发生在管道外面，即周围介质中，换句话说，不管外部压力如何，沿管道的压力降不能大于从 p_0 降到 p_*. 对于空气($p_*=0.53\,p_0$)来说，管道内的最大压力降为 $0.47\,p_0$. 当 $p_e<p_*$ 时，管道出口端的速度以及流量也始终保持不变. 因此，气体流过这种类型的喷管时，不可能获得超声速的速度.

如果我们只考虑管道出口端邻近处的流动，则气体离开管道后的运动基本上是绕拐角的流动，其拐角的顶端就是管口的边缘；我们将在 §104 中详细地讨论这种流动.

流过一个逐渐收缩的喷管不可能获得超声速的原因在于：等于当地声速的速度，只能在这种喷管的出口处达到. 显然，借助于首先收缩然后再扩张的喷管(图 55)，就可以达到超声速的速度.

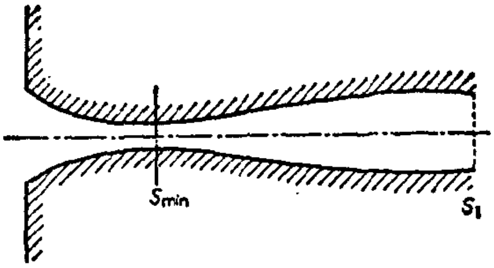


图 55

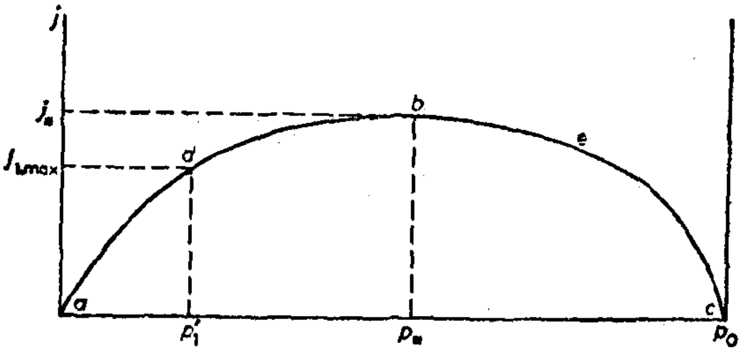


图 56

这种喷管称为**拉瓦尔喷管**.

如果达到最大的质量通量密度 j_*，也只能够出现在最小截面上，所以，流量不能超过 $S_{\min}j_*$. 在喷管的收缩段，质量通量密度不断增加(同时压力下降)；图 56 中的曲线给出了 j 随 p 的变化关系①，刚才描述的变化关系对应于由 c 到 b 的区间. 如果在截面 $S_{\min}$ 上达到了最大的质量通量密度(图 56 中的点 b)，则在喷管的扩张段中，压力将继续减小，此时 j 也开始减小，这对应于曲线 ba 段. 在喷管的开口端，j 取一个确定的值：$j_{1,\max}=j_*S_{\min}/S_1$，同时压力有相应的值，如图 56 中曲线上某点 d 的压力 p_1'. 但是，如果在截面 $S_{\min}$ 上只达到某个点 e，则压力在喷管的扩张段将不断增加，这对应于从 e 向 c 返回的这段曲线. 初看起来，似乎借助于形

① 根据公式(80.15)—(80.17)，其依赖关系为

$$j=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}\left\{\frac{2\gamma}{\gamma-1}p_0\rho_0\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}.$$

成一个激波，就可以不通过点 b 而从 cb 跃变到 ab. 然而这是不可能的，因为“进入”激波的气体不可能是亚声速的速度.

记住上述结果，现在来研究当外部压力逐渐地增加时流出情况的变化规律. 当外部压力很小且从零到 p_1' 时，截面 $S_{\min}$ 处总达到压力 p_* 和速度 $v_*=c_*$. 于是，在喷管的扩张段，速度继续增加，结果产生气体的超声速流动，同时压力相应地继续减小，不管压力 p_e 如何，它都在喷管出口端达到值 p_1'. 然后通过由喷管口边缘发出的稀疏波，压力从 p_1' 降到喷管外的 p_e(参看 § 104).

当 p_e 超过 p_1' 时，一道斜激波从喷管口的边缘发出，将气体从 p_1' 压缩至 p_e(§ 104). 但是，我们将看到，只有在激波强度不太高时，才能够从固壁发出定常激波 (§ 103). 因此，当外部压力进一步增加时，激波很快地开始向喷管内移动，而在激波前的喷管内壁上出现分离. 对于某个 p_e 的值，激波到达最小截面，然后便消失；流动则处处都变成亚声速的，而且在喷管扩张段的壁面上出现分离. 当然，所有这些复杂的现象都是三维的.

问　　题

通过喷管上的一小段，将少量的热量供给在喷管中作定常流动的理想气体，试确定气体流过这段喷管时的速度改变.

解: 设 Sq 是每单位时间内供给的热量，S 是所讨论的这段喷管的截面面积. 在加热段的两边，质量通量密度 $j=\rho v$ 和动量通量密度 $p+jv$ 是相同的；因此，$\Delta p=-j\Delta v$，其中 Δ 表示一个量通过这段喷管的改变. 能量通量密度$\left(w+\frac{1}{2}v^2\right)j$ 的改变为 q. 将 w 写成 $w=\gamma p/(\gamma-1)\rho=\gamma pv/(\gamma-1)j$，于是得到 (假设 Δv 和 Δp 均很小) $vj\Delta v+\gamma(p\Delta v+v\Delta p)/(\gamma-1)=q$. 消去 Δp，得 $\Delta v=(\gamma-1)q/\rho(c^2-v^2)$. 于是可知，在亚声速流动中，供给热量会加速流动 ($\Delta v>0$)，而在超声速流动中，供给热量则减速流动 ($\Delta v<0$).

将气体的温度写为 $T=\mu p/R\rho=\mu pv/Rj$ (R 为气体常数)，我们求得

$$\Delta T=\frac{\mu}{Rj}(v\Delta p+p\Delta v)=\frac{\mu(\gamma-1)q}{Rj(c^2-v^2)}\left(\frac{c^2}{\gamma}-v^2\right).$$

对于超声速流动，这个表达式总是正的，所以气体温度总是增加的；但对于亚声速流动，ΔT 可以是正的，也可以是负的.

§91. 管道中粘性气体的流动

我们来研究气体在(等截面)长管道中的流动，该管道是如此之长，以致气体对管壁的摩擦，即气体的粘性，不能再忽略不计了. 我们将假定管壁是绝热的，所以气体与周围介质之间没有热交换.

当气体速度近乎声速或超声速时(这里只讨论这种情形)，如果管道的直径不是太小，管道中的气流当然是湍流的. 就我们的问题而言，我们在 § 43 已经知道流动的湍性只在这样一个方面才重要：湍流流动的(平均)速度在管道截面上几乎处处相同，只是在非常接近管壁的地方才迅速地减小为零. 于是，我们将假定气体速度 v 在整个截面上是个常数，并且这样来定义 v，使得乘积 $S\rho v$ (S 是管道截面的面积)等于通过管道截面的总流量.

既然总流量 $S\rho v$ 沿管道是不变的，并且假定了 S 不变，因而质量通量密度也一定是不变的：

$$j=\rho v=\text{常数}. \tag{91.1}$$

其次，因为管道是绝热的，所以，通过任一截面由气体所携带的总能量通量也一定是不变的. 这个总能量通量为 $S\rho v\left(w+\frac{1}{2}v^2\right)$，据式(91.1)，我们得

$$w+\frac{1}{2}v^2=w+\frac{1}{2}j^2V^2=\text{常数}. \tag{91.2}$$

由于存在着内摩擦，气体的熵 s 当然不能保持不变，而是随着气体沿管道的运动而增加. 如果 x 是沿管道的坐标，且指向下游，则可以写出

$$ds/dx>0. \tag{91.3}$$

现在将式(91.2)对 x 求微分. 因为 $dw=Tds+Vdp$，所以有

$$T\frac{ds}{dx}+V\frac{dp}{dx}+j^2V\frac{dV}{dx}=0.$$

然后将

$$\frac{dV}{dx}=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\frac{dp}{dx}+\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p\frac{dp}{dx}, \tag{91.4}$$

代入上式，则得

$$\left[T+j^2V\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_p\right]\frac{ds}{dx}=-V\left[1+j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right]\frac{dp}{dx}. \tag{91.5}$$

根据熟知的热力学公式，有 $\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p=\frac{T}{cp}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$. 对于气体而言，热膨胀系数总是正的，因此利用式(91.3)，可以断定式(91.5)的左边是正的．于是，导数 dp/dx 的符号与

$$-\left[1+j^2\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s\right]=\left(\frac{v}{c}\right)^2-1$$

的符号相同．我们知道

$$\text{当 } v\lessgtr c \text{ 时，} \frac{dp}{dx}\lessgtr 0. \tag{91.6}$$

所以，在亚声速流动中，压力向下游方向减小，这和不可压缩流体的情形相同．而对于超声速流动而言，压力则是向下游方向增加的．

我们可以用类似方法确定出导数 dv/dx 的符号．因为

$$j=v/V=\text{常数},$$

所以，dv/dx 的符号与 dV/dx 的符号相同．借助于式(91.4)和(91.5)，dV/dx 可以用正的导数 ds/dx 来表示．其结果为

$$\text{当 } v\gtrless c \text{ 时，} dv/dx\lessgtr 0, \tag{91.7}$$

即在亚声速流动时，速度向下游方向增加，而在超声速流动时，速度则是向下游方向减小的．

管道中气流的任何两个热力学量都可以互为函数，而这种函数关系(尤其是)与管道的阻力定律无关．这些函数依赖于作为

参数的常数 j，并且由方程 $w+\frac{1}{2}j^2V^2=$ 常数所确定，这个方程是由气体的质量守恒方程和能量守恒方程中消去速度而得到的.

我们以熵作为压力的函数为例，来说明这些函数所给出的曲线的性质. 将式(91.3)改写成如下形式:

$$\frac{ds}{dp}=V\frac{(v/c)^2-1}{T+j^2V(\partial V/\partial s)_p},$$

由此可知，在 $v=c$ 的点上，熵有极值. 很容易看出，此时熵 s 有最大值. 因为在这个点上，s 对 p 的二阶导数为

$$\left[\frac{d^2s}{dp^2}\right]_{v=c}=-\frac{j^2V(\partial^2V/\partial p^2)_s}{T+j^2V(\partial V/\partial s)_p}<0;$$

照例，我们假定导数 $(\partial^2V/\partial p^2)_s$ 是正的.

于是，s 作为 p 函数的关系曲线，称为**芬努(Fanno)线**，示于图57中. 亚声速区域位于最大值的右面，而超声速区域位于其左面. 当参数 j 增加时，曲线逐渐降低. 因为，将方程(91.2)在常压 p 下对 j 微分，有

$$\frac{ds}{dj}=-\frac{jV^2}{T+j^2V(\partial V/\partial s)_p}<0.$$

根据上述结果，我们可以引出一个有趣的结论. 设在管道入口处的气体速度小于声速. 熵向下游方向增加，而压力向下游方向减小；这种情况对应于沿曲线 $s=s(p)$ 的右边一支移动，且由 B 指向 O (图57). 但是，这只能继续到熵达到其最大值为止. 到达点 O 以后，进一步沿曲线左边一支向前移动（即进入超声速区域）是不可能的，因为，此时气体的熵值将随气体沿管道的运动

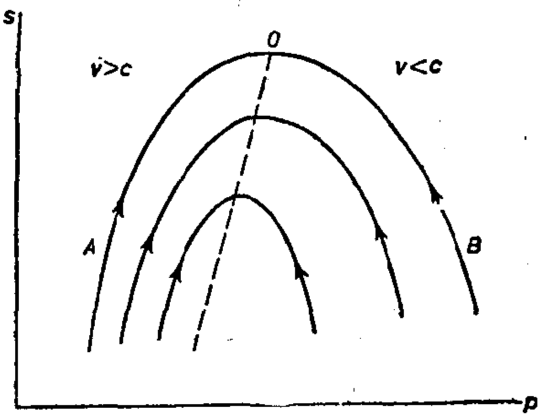


图 57

而减小．甚至不可能由激波来实现曲线的 BO 一支到 OA 一支的过渡，因为进入激波的气体不能以亚声速的速度运动．

因此可以断言：如果进入管道入口处的气体速度小于声速，则整个管道中的流动将保持为亚声速．假如存在这种情形的话（除非气体排出时，外部介质的压力足够小，这种情形才可能出现）．气体速度也只能在管道的另一端达到当地声速．

为了使气体在管道内具有超声速的速度，其入口处的速度必须是超声速的．根据超声速流动的一般性质（不可能向上游传播扰动），则流动必将完全与管道出口处的条件无关．特别是，熵将沿着管道以完全确定的方式增加，因而在离开入口处的一个确定的距离 $x=l_k$ 处达到最大值．如果管道的总长度 l 小于 l_k，则流动在整个管道中是超声速的（相应于在 AO 一支上由 A 向 O 的移动）．反之，如果 $l>l_k$，流动就不可能在整个管道中都是超声速的，也不可能光滑地过渡到亚声速流动．因为沿着 OB 一支只能朝着箭头所指示的方向移动．因此，在这种情形下，不可避免地会形成一个激波，它使流动从超声速流跃变到亚声速流．从而使压力增加了，于是，可以不经过点 O 而从 AO 一支过渡到 BO 一支．在间断以后，流动完全是亚声速的．

§92. 一维自相似流动

气体一维不定常流动的一个重要类型，是在产生流动的条件中只有特征速度而没有特征长度．其中最简单的例子是：在以活塞为边界的半无限圆柱形管道中，当活塞开始以等速运动时所产生的气体流动．

速度参数以及（比如说）初始时刻气体压力和密度等参数决定了这种运动．但是，我们不可能由这些参数的组合，来构成具有长度或时间量纲的量．由此可见，所有物理量的分布情形，只能通过

具有速度量纲的比值 x/t 而依赖于坐标 x 和时间 t. 换句话说，不同时刻的这些分布应该是相似的，差别只在于沿 x 轴的标尺与时间成比例地增加. 我们可以说，如果长度用一个与时间成正比增加的单位来测量，则流动图象就不会改变. 如果长度的标尺适当地变化，而流动图象不随时间而变化，我们就把这种流动称为**自相似流动**.

流动只依赖于一个坐标 x 时，其熵守恒方程为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+v_x\frac{\partial s}{\partial x}=0.$$

假定所有的量只依赖于 $\xi=x/t$，并且注意到在这种情形下有 $\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{t}\frac{d}{d\xi}$, $\frac{\partial}{\partial t}=-\frac{\xi}{t}\frac{d}{d\xi}$, 则可以得到

$$(v_x-\xi)s'=0$$

(其中一撇表示对 ξ 的导数). 因此，$s'=0$, 即 $s=$常数①; 所以，一维自相似流动一定是等熵的. 同样地，根据 y 分量和 z 分量的欧拉方程:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}=0,$$

我们发现，v_y 和 v_z 都是常量，可以把 v_x 和 v_y 取为零而不失普遍性,

其次，连续方程和 x 分量的欧拉方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial x}=0, \tag{92.1}$$

---

① $v_x-\xi=0$ 的假设是与其它运动方程相矛盾的；因为根据式(92.3)，应有 $v_x=$常数，这与假设相矛盾.

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \tag{92.2}$$

在这里和以后，我们把 v_x 写为 v. 用变量 ξ 来表示，这些方程变为

$$(v-\xi)\rho'+\rho v'=0, \tag{92.3}$$

$$(v-\xi)v'=-p'/\rho=-c^2\rho'/\rho. \tag{92.4}$$

因为熵是不变的，所以在第二个方程中已经令 $p'=(\partial p/\partial\rho)_s\rho'=c^2\rho'$.

首先，这些方程有平凡解：$v=$常数，$\rho=$常数，即等速的均匀流动. 为了寻求非平凡解，从这组方程中消去 ρ' 和 v'，得到 $(v-\xi)^2=c^2$，因此，$\xi=v\pm c$. 我们将取正号：

$$\frac{x}{t}=v+c; \tag{92.5}$$

这样选择符号，意味着将按照一定的方向选取 x 轴的正向，以后还要具体说明这种取法. 最后，将 $v-\xi=-c$ 代入式(92.3)，可得 $c\rho'=\rho v'$ 或 $\rho\,dv=c\,d\rho$. 声速是气体热力学状态的函数；把熵 s 和密度 ρ 看成基本的热力学量，则对于任何一个给定的等熵值，就可以将声速表示为密度的函数 $c(\rho)$. 把 c 理解成这样一个函数，可以写出

$$v=\int c\frac{d\rho}{\rho}=\int\frac{dp}{c\rho}. \tag{92.6}$$

这个公式也可以写为

$$v=\int\sqrt{-dp\,dV}, \tag{92.7}$$

在这个公式中，因变量的选择仍旧是未定的.

公式(92.5)和(92.6)给出了运动方程所需的解. 如果已知函数 $c(\rho)$，则由式(92.6)，就可以计算出速度 v 作为密度的函数. 于是方程(92.5)给出密度为 x/t 的隐函数，因而确定了其余各量

对 x/t 的依赖关系.

我们可以导出由此得到的解的若干普遍性质. 将方程(92.5)对 x 微分,则得

$$t\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{d(v+c)}{d\rho}=1. \tag{92.8}$$

由式(92.6),可得 $v+c$ 的导数为

$$\frac{d(v+c)}{d\rho}=\frac{c}{\rho}+\frac{dc}{d\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho c)}{d\rho}.$$

但

$$\rho c=\rho\sqrt{\frac{\partial p}{\partial\rho}}=1\Big/\sqrt{-\frac{\partial V}{\partial p}};$$

微分后,得

$$\frac{d(\rho c)}{d\rho}=c^2\frac{d(\rho c)}{dp}=\frac{1}{2}\rho^3c^5\left(\frac{\partial^2V}{\partial p^2}\right)_s. \tag{92.9}$$

因此

$$\frac{d(v+c)}{d\rho}=\frac{1}{2}\rho^2c^5\left(\frac{\partial^2V}{\partial p^2}\right)_s>0. \tag{92.10}$$

于是从式(92.8)可以看出:

$$\text{当 } t>0 \text{ 时,有}\frac{\partial\rho}{\partial x}>0①.$$

由于 $\partial p/\partial x=c^2\partial\rho/\partial x$,还可以得出 $\partial p/\partial x>0$. 最后,我们有 $\partial v/\partial x=(c/\rho)\partial\rho/\partial x$,所以 $\partial v/\partial x>0$. 于是下列不等式成立:

$$\partial\rho/\partial x>0,\ \partial p/\partial x>0,\ \partial v/\partial x>0. \tag{92.11}$$

如果对于给定的气体元看这些量随体积的变化,而不是对于给定的 t 看这些量沿 x 轴的变化,则上述不等式的意义就更清楚了. 这些变化由对时间的全导数确定,例如,对于密度而言,利

① 在这里所讨论的自相似流动中,时间 $t<0$ 的情形是没有意义的. 这样的流动所以能出现, 只是由于在点 $x=0$ 处, 流动的初始条件($t=0$)中的某些奇异性,所以,只有当 $t>0$ 时才能发生(在本例,活塞速度在 $t=0$ 时有间断. 也可参看 §93).

用连续方程，我们有

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\rho\frac{\partial v}{\partial x}.$$

根据不等式 (92.11) 的第三式而知，$d\rho/dt$ 这个量是负的，因而 dp/dt 也是负的，即

$$d\rho/dt<0,\quad dp/dt<0. \tag{92.12}$$

仿此(利用欧拉方程(92.2))，还可以看出 $dv/dt<0$；但是，这并不意味着速度的大小随时间而减小，因为 v 也可以是负的.

不等式(92.12)表明：任何气体元的密度和压力随着气体元的运动而减小. 换句话说，当气体运动时，气体是逐渐变得稀疏的. 所以，这种气体流动可以称为**非定常的稀疏波**.

稀疏波只能沿 x 轴传播一个有限的距离；这可以从公式(92.5)看出，当 $x\to\pm\infty$ 时，公式(92.5)将给出无限大的速度，但这是不可能的.

现在将公式(92.5)应用到稀疏波所占有的空间区域的边界平面上去. 这时，x/t 是该边界平面相对于所选定的固定坐标系的速度. 而该边界平面相对于气体本身的速度为$(x/t)-v$，并且根据式(92.5)，这个速度等于当地声速. 这就意味着稀疏波的边界是弱间断面. 因此，不同情形下的自相似流动是由稀疏波和均匀流区域所组成的，而这些区域是以弱间断面为分界面的①.

现在可以看出，式(92.5)符号的选择是对应于：假定弱间断面相对于气体沿 x 轴的正向运动. 不等式 (92.11) 是由于这样的选择而产生的，但是，不等式(92.12)显然不依赖于 x 轴的方向.

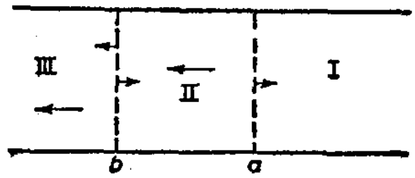


图 58

在实际问题中，我们通常所关心的是稀疏波一边以静止气体

① 当然，也可以存在以激波为分界面的均匀流动区域.

区域为界．设静止气体区域（图 58 中的 I 区）在稀疏波的右面．II 区是稀疏波，而 III 区是以恒定速度运动的气体．图中箭头说明气体以及稀疏波边界（弱间断面）的运动方向；间断面 a 总是向静止气体的一侧运动的，但间断面 b 可在两个方向上运动，究竟哪个方向，依稀疏波中所达到的速度而定（参看问题 2）．假设是理想气体，就可以给出这种稀疏波中各量之间的显函数关系．对于绝热过程，有 $\rho T^{1/(1-\gamma)}=$常数．因为声速正比于$\sqrt{T}$，可以将上述关系式写为

$$\rho=\rho_0(c/c_0)^{2/(\gamma-1)}. \tag{92.13}$$

以此式代入积分(92.6)，得

$$v=\frac{2}{\gamma-1}\int dc=\frac{2}{\gamma-1}(c-c_0);$$

积分常数要这样选取：当 $v=0$ 时，$c=c_0$（用下标“0”表示气体静止处的那个点上的值）．我们将用 v 来表达所有的量，应该记住，根据上述各个区域的情况，气体速度是沿着 x 轴的负向，即 $v<0$．因此

$$c=c_0-\frac{1}{2}(\gamma-1)|v|, \tag{92.14}$$

上式给出了用气体速度来表示当地声速的显函式．代入式(92.13)，求得密度为

$$\rho=\rho_0\left[1-\frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{|v|}{c_0}\right]^{2/(\gamma-1)}, \tag{92.15}$$

用类似方法，求得压力为

$$p=p_0\left[1-\frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{|v|}{c_0}\right]^{2\gamma/(\gamma-1)}. \tag{92.16}$$

最后，将式(92.14)代入公式(92.5)，得

$$|v|=\frac{2}{\gamma+1}\left(c_0-\frac{x}{t}\right), \tag{92.17}$$

上式给出 v 作为 x 和 t 的函数．

根据定义，量 c 不可能是负的. 于是，我们可以从式(92.14)得出重要的结论：速度必须满足不等式

$$|v| \leqslant 2c_0/(\gamma-1); \tag{92.18}$$

当速度达到极限值时，气体密度(以及 p 和 c)就变为零. 因此，原来处于静止、后来又在稀疏波中作非定常膨胀的气体，只能加速到不超过 $2c_0/(\gamma-1)$ 的速度.

在本节一开始，我们就已经提到过一个自相似流动的简单例子，就是在圆柱形管道中，当活塞开始以等速度运动时所产生的流动. 如果活塞在管道内向外运动，则产生稀疏作用，从而形成上述那种稀疏波. 但是，如果活塞向内运动，则压缩活塞前面的气体，这时只能靠一个激波来实现向原来较低的压力过渡；事实上，在管道中向内运动的活塞前面，的确形成了一个激波(参看本节问题)①.

问　　题

问题1. 设理想气体充满半无限圆柱形管道，一端以活塞为界. 在初始时刻，活塞开始以等速度 U 向理想气体一端推进. 试确定由此产生的气体流动.

解： 在活塞前面形成一个激波，并沿管道运动. 在初始时刻，这个激波与活塞重合，但是在以后的时间过程中，激波在活塞的前面，并且有一个气体区域介于两者之间(2区). 在激波前面(1区)，气体压力等于其初始值 p_1，同时气体相对于管道的速度为零. 在2区，气体均以等速度运动，其速度等

---

① 我们还可以提出一个相类似的三维自相似运动：即由均匀膨胀球所引起的中心对称的气体流动. 在膨胀球的前面形成一个等速扩张的球面激波. 与一维情形中遇到的情况不同，球与激波之间气体的速度不是均匀的：用以确定气体速度作为比值 r/t 函数的方程(由此还可以得出激波传播的速率)不能解析地积分出来.

Л.И. 谢道夫(1945)和 G.I. 泰勒(1946)已经讨论过这个问题，参阅 L.I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Cleaver-Hume Press, London 1959 (有中译本，科学出版社 1982)；G.I. Taylor, *Proceedings of the Royal Society*, A 186, 273, 1946.

于活塞的速度U(图 59). 因此,1区和2区之间的速度差也是U,并且根据公式(82.7)和(85.1),可以写出

$$U=\sqrt{(p_2-p_1)(V_1-V_2)}$$
$$=(p_2-p_1)\sqrt{2V_1/[(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2]}.$$

于是,活塞与激波之间的气体压力p_2由下式求出:

$$\frac{p_2}{p_1}=1+\frac{\gamma(\gamma+1)U^2}{4c_1^2}+\frac{\gamma U}{c_1}\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2U^2}{16c_1^2}}.$$

知道了p_2,由公式(85.4)就可以算出激波相对于它两边气体的速度. 因为气体1是静止的,所以激波相对于它的速度就等于激波沿管道传播的速度. 如果x坐标(沿着管道)是从活塞的初始位置量起的(气体在$x>0$的一边),我们求得t时刻的激波位置为

$$x=t\left\{\frac{1}{4}(\gamma+1)U+\sqrt{\left[\frac{1}{16}(\gamma+1)^2U^2+c_1^2\right]}\right\},$$

而活塞的位置为

$$x=Ut.$$

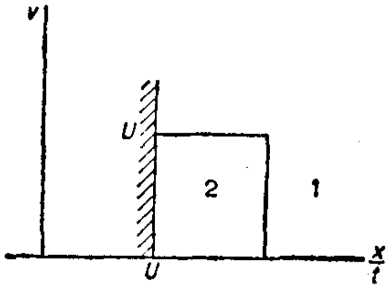


图 59

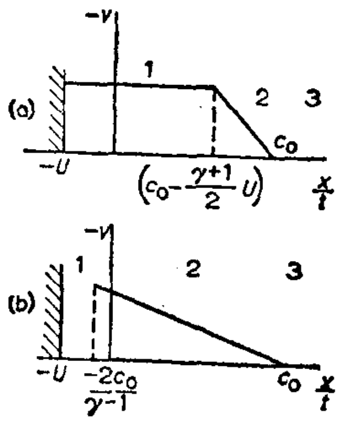


图 60

问题2. 与问题1相同,但活塞在管道内以速度U向背离气体方向运动.

解: 活塞连着一个沿x轴的负向以等速度$-U$(即活塞的速度)运动的气体区域(图60a中1区). 其后面跟着一个稀疏波(2),在稀疏波中,气体沿x轴的负向运动,气体的速度按照式(92.7)线性地从$-U$变到零. 压力按照式(92.16)变化,从气体1中的$p_1=p_0\left[1-\frac{1}{2}(\gamma-1)U/c_0\right]^{2\gamma/(\gamma-1)}$变到静止气体3中的$p_0$. 条件$v=-U$给出1区和2区的分界面;根据式(92.17),我

们有

$$x=\left[c_0-\frac{1}{2}(\gamma+1)U\right]t=(c-U)t,$$

其中 c 是气体 1 的声速. 在 2 区和 3 区的分界面上, $v=0$, 所以分界面的 $x=c_0t$. 这两个分界面都是弱间断面; 第二个总是向右传播的（即离开活塞的）, 而第一个既可以向右传播（如图 60a 所示）, 也可以向左传播（如果活塞速度 $U>2c_0/(\gamma+1)$）.

只有当 $U<2c_0/(\gamma+1)$ 时, 才能出现刚才所描绘的流动图象. 如果 $U>2c_0/(\gamma+1)$, 则在活塞前面形成一个真空区（气体跟不上活塞）, 真空区从活塞延伸到点

$$x=-2c_0t/(\gamma-1)$$

（图 60b 中 1 区）. 在这个点上,

$$v=-2c_0/(\gamma-1);$$

然后跟着 2 区, 在 2 区中的点 $x=c_0t$ 处, 气体的速度一直下降到零. 最后便是气体处于静止状态的 3 区了.

问题 3. 设气体充满半无限长圆柱形管道 $(x>0)$ 其一端以阀门为界. 在 $t=0$ 时, 打开阀门, 让气体流入外部介质, 而外部介质的压力 p_e 小于管道内的初始压力 p_0. 试确定由此产生的气体流动.

解: 设 $-v_e$ 是按照公式 (92.16) 与外部压力 p_e 对应的气体速度; 当 $x=0$ 和 $t>0$ 时, 必须有 $v=-v_e$. 如果 $v_e<2c_0/(\gamma+1)$, 则速度分布如图 61a 所示. 当 $v_e=2c_0/(\gamma+1)$ 时（对应于气体流出的速度, 等于管道出口处的当地声速; 只要在公式 (92.14) 中令 $v=c$, 很容易得出这一结论）, 等速区域消失了, 于是得到图 61b 所示的图象. 在上述条件下, 量 $2c_0/(\gamma+1)$ 是气体从管道中流出的最大可能的速度. 如果外部压力 p_e 满足下式:

$$p_e<p_0[2/(\gamma+1)]^{2\gamma/(\gamma-1)}, \tag{1}$$

则相应的气体速度超过 $2c_0/(\gamma+1)$. 实际上, 管道出口处的压力仍然等于

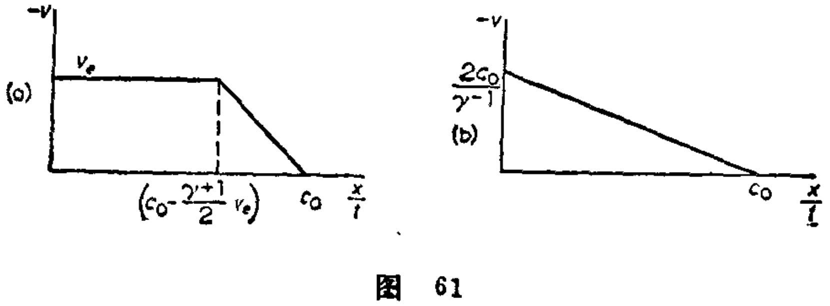


图 61

其极限值(即式(1)的右边)，并且流出的速度应该是 $2c_0/(\gamma+1)$；剩下的压力降(降到 p_e)发生在外部介质中.

问题 4. 设一由活塞分开的无限管道，在 $x<0$ 的一边，初始时刻充满压力为 p_0 的气体，而另一边，则是真空. 试确定活塞随气体膨胀的运动.

解: 在气体中形成一稀疏波，其边界之一随活塞向右运动，而另一边界则向左运动. 活塞的运动方程为

$$mdU/dt=p_0\left[1-\frac{1}{2}(\gamma-1)U/c_0\right]^{2\gamma/(\gamma-1)},$$

其中，U 是活塞的速度，m 是活塞每单位面积的质量. 积分后得

$$U(t)=\frac{2c_0}{\gamma-1}\left\{1-\left[1+\frac{(\gamma+1)p_0}{2mc_0}\right]^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)}\right\}.$$

问题 5. 试确定等温自相似稀疏波中的气体流动.

解: 等温声速为 $c_T=\sqrt{(\partial p/\partial\rho)_T}=\sqrt{RT/\mu}$，在恒定温度下，$c_T=$ 常数 $=c_{T_0}$. 根据公式(92.5)和(92.6)，则得

$$v=c_{T_0}\ln(\rho/\rho_0)=c_{T_0}\ln(p/p_0)=(x/t)-c_{T_0}.$$

§93. 初始条件中的间断

气体中出现间断面的最重要原因之一，就是在初始条件中可能有间断，一般说来，初始条件(即初始的速度分布、压力分布等)是可以任意规定的. 特别是，初始条件不必处处是连续的，而可以在各种各样的曲面上是间断的. 例如，在某个时刻将两团压力不同的气体放在一起，那么它们的接触面就是初始压力分布的一个间断面.

重要的是:初始条件中各种量的间断(或如以后所称的**初始间断**)可以具有任何数值，相互之间不必存在任何关系. 但是我们知道，在气体中稳定的间断面上需要满足一定的条件；例如，激波上密度和压力的间断由激波绝热曲线联系. 因此很清楚，如果在初始间断中不满足这些条件，则在以后的时间中，初始间断面就不可能继续成为一个间断面. 而一般说来，初始间断面要分裂成几个间

断面，每一个都是一种可能类型的间断面(激波、切向间断面、弱间断面)；在时间过程中，这些间断面之间是越离越远的．关于任意间断面的演变过程，H. E. 柯钦(1926)曾作出一般性的讨论．

在初始时刻 $t=0$ 之后的一个很短的时间间隔内，由初始间断面形成的这些间断面还离开不远，于是，所讨论的流动发生在邻接于初始间断面的一个比较小的范围内．照例，讨论由初始间断面上分割出来的各个小部分就足够了，其中每一个部分都可以当成平面．因此，我们只需要讨论平面的间断面，并将其取成 yz 平面．根据对称性，这些由初始间断面形成的间断面显然也是平面，而且垂直于 x 轴．流动图象将只依赖于坐标 x (以及时间)，所以问题是一维的．这里没有长度和时间的特征参数，因而是一个自相似的问题，并且可以利用 §92 所得到的结果．

由初始间断形成的间断面，显然一定会离开它们形成的地点，即离开初始间断的位置．不难看出，在每一个方向(x 轴的正向和负向)上，不是一个激波在运动，就是一对作为稀疏波边界的弱间断面在运动．因为，譬如说，如果 $t=0$ 时在同一点形成两个激波，并且都沿着 x 轴的正向传播，则前面的激波将比后面的激波运动得更快．但是，根据激波的一般性质，前面的激波相对于它后面的气体，是以小于该气体声速 c 的速度运动，而后面的激波相对于同一气体，则是以大于该气体声速 c 的速度运动(在两个激波之间的区域中，c 是相同的)，即后面的激波一定会赶上前面的激波．根据同样的理由，一个激波和一个稀疏波不可能沿同一方向传播；为了看清楚这一点，只需指出弱间断面是以声速相对于其两侧的气体而运动的．最后，同一时间形成的两个稀疏波是不可能分离开去的，因为两个稀疏波后阵面的速度是相同的．

像激波和稀疏波一样，一般说来，初始间断面也一定会形成一个切向间断面．如果横向速度分量 v_y、v_z 在初始间断面上间断，

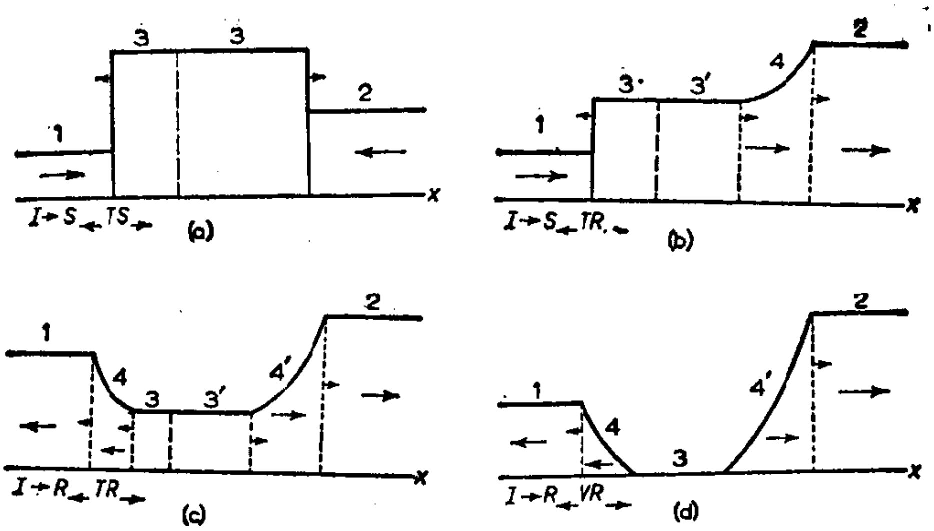
则切向间断面必然出现. 因为这些速度分量在激波和稀疏波上是不改变的，所以 v_y 和 v_z 的间断总是发生在切向间断面上，这种切向间断面停留在初始间断面的位置；在切向间断面的两边，v_y 和 v_z 是不变的(当然，由于切向速度间断的不稳定性，实际上将使得它逐渐变得平滑化而成为一个湍流区).

但是，即使 v_y 和 v_z 在初始间断面上是连续的(可令 v_y、v_z 为零而不失普遍性)，切向间断面也一定会出现. 这一点说明如下：因为由初始间断形成的间断面，一定可以实现从初始间断面一边给定的气体状态 1 过渡到另一边给定的状态 2. 气体的状态由三个独立变量决定，例如 p、ρ 和 $v_x=v$. 于是，为了通过某种间断面，使状态 1 过渡到任意的状态 2，就必须具有三个任意参数. 但是我们知道，在给定了热力学状态的气体中，一个垂直于气流方向传播的激波由一个参数就可完全确定(§ 82). 对稀疏波也有同样的结论；正如我们从公式(92.14)－(92.16)所看到的，当进入稀疏波的气体的状态给定时，则从稀疏波出来的气体状态由一个参数就可以完全确定. 而且我们已经知道，沿每一个方向最多只可能有一个波(稀疏波或激波)传播. 因此，能够听任我们处理的只有两个参数，这是不够的.

在初始间断面位置上形成的切向间断面提供了所需的第三个参数. 在切向间断面上，压力仍然是连续的，而密度是间断的(因而温度和熵也是这样). 切向间断面相对于它两边的气体是不动的，因此，上面关于两个同向传播波"追赶"的讨论不适用于切向间断面.

因为没有穿过切向间断面的气体运动，所以切向间断面两边的气体不会混合；在下面列举的所有例子中，两边的气体可以是不同的物质.

图 62 示意地画出了初始间断面分解后的所有可能类型. 实



——激波　----切向间断面　…………弱间断面

图 62

线表示压力沿 x 轴的变化；密度变化应该由一条类似的曲线表示，差别只在于密度在切向间断面上还有一个跃变. 垂直线表示所形成的间断面，而箭头表示间断面的传播方向以及气流的方向. 坐标系总是这么选取：使得切向间断面连同与它邻接的 3 区和 3′ 区中气体处于静止状态. 在最左面的 1 区和最右面的 2 区中，气体的压力、密度和速度，是这些量在 $t=0$ 时初始间断面两边的值.

第一种情形记作 $I\to S_{\leftarrow}TS_{\rightarrow}$(图 62a). 在这种情形下，初始间断面 I 给出两个朝相反方向传播的激波 S，以及在它们之间的一个切向间断面 T. 这种情形出现在两团气体以很大的相对速度碰撞的时候.

在 $I\to S_{\leftarrow}TR_{\rightarrow}$(图 62b)的情形下，激波在切向间断面的一侧传播，同时一个稀疏波 R 在切向间断面的另一侧传播. 例如，在初始时刻，如果两团气体相对静止($v_2-v_1=0$)，并在不同压力下两团气体相接触时，就会出现这种情形. 其实，在图 62 所示的四种情形中，只有第二种情形是气体 1 和气体 2 朝同一方向运动的，因而，方程 $v_1=v_2$ 是可能的.

在第三种情形中($I\to R_{\leftarrow}TR_{\rightarrow}$，图 62c)，在切向间断面的每一侧传播着稀疏波. 如果气体 1 和气体2可以足够大的相对速度 v_2-v_1 分离，则在稀疏波中，压力可减小到零. 于是，我们得到图 62d 的图象；且在 4 区和 4′ 区之间形成一个真空区 3.

利用初始间断的参数，可以导出确定初始间断分解特性的解析条件. 我们将在所有的情形中假定 $p_2>p_1$，同时取 x 轴的正向由 1 区指向 2 区(如图 62).

因为初始间断面两侧的气体可以是不同的物质，所以将它们区分为气体 1 和气体 2. .

(1) $I\to S_{\leftarrow}TS_{\rightarrow}$. 设 $p_3=p_3'$、V_3 和 V_3' 是新产生的 3 区和 3′ 区中的压力和比容，于是有 $p_3>p_2>p_1$，同时，在通过(p_1，V_1)和(p_2，V_2)的两条激波绝热曲线上，比容 V_3 和 V'_3 分别是具有同一纵坐标 p_3 的两个点的横坐标. 因为 3 区和 3′ 区的气体在所选的坐标系中是静止的，所以可以利用公式(82.7)，分别得出沿 x 轴的正向和负向的速度 v_1 和 v_2:

$$v_1=\sqrt{(p_3-p_1)(V_1-V_3)}\,,\quad v_2=-\sqrt{(p_3-p_2)(V_2-V'_3)}.$$

对于给定的 p_1 和 p_2，与最初假定($p_3>p_2>p_1$)不相矛盾的最小的 p_3 值等于 p_2. 而且，因为差值 v_1-v_2 是 p_3 的单调增函数，所以求得所需的不等式为

$$v_1-v_2>\sqrt{(p_2-p_1)(V_1-V')}\,,\tag{93.1}$$

其中 V' 表示气体 1 通过点(p_1，V_1)的激波绝热曲线上纵坐标为 p_2 的点的横坐标. 从公式(85.1)(其中 V_2 由 V' 代替)计算出 V'，则得到关于理想气体的条件(93.1)有如下形式

$$v_1-v_2>(p_2-p_1)\sqrt{2V_1/[(\gamma_1-1)p_1+(\gamma_1+1)p_2]}.\tag{93.2}$$

应该指出：由式(93.1)和(93.2)对速度差 v_1-v_2 的可能值所确定的界限，显然不依赖于所选取的坐标系.

(2) $I\to S_{\leftarrow}TR_{\rightarrow}$. 这里 $p_1<p_3=p_3'<p_2$. 1 区中的气体速度

仍是

$$v_1=\sqrt{(p_3-p_1)(V_1-V_3)},$$

同时根据式(92.7)，速度在稀疏波 4 中总的改变量为

$$v_2=\int_{p_3}^{p_2}\sqrt{-dpdV}.$$

对于给定的 p_1 和 p_2 的值，p_3 的值可以位于它们之间. 在差值 v_1-v_2 中，先以 p_1 代替 p_3，再以 p_2 代替 p_3，则得到条件

$$-\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{-dpdV}<v_1-v_2<\sqrt{(p_2-p_1)(V_1-V')}. \qquad (93.3)$$

其中，V' 具有和上面情形同样的意义；差值 v_1-v_2 的上限应该对气体 1 进行计算，而下限则对气体 2 进行计算. 对于理想气体，则有

$$-\frac{2c_2}{\gamma_2-1}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma_2-1)/2\gamma_2}\right]<v_1-v_2$$

$$<(p_2-p_1)\sqrt{2V_1/[(\gamma_1-1)p_1+(\gamma_1+1)p_2]}, \qquad (93.4)$$

其中，$c_2=\sqrt{\gamma_2 p_2 V_2}$ 是状态为(p_2,V_2)的气体 2 中的声速.

(3) $I\to R_{\leftarrow}TR_{\rightarrow}$. 这里 $p_2>p_1>p_3=p'_3>0$. 按照同样的方法，求得出现这种情形的下述条件：

$$-\int_0^{p_1}\sqrt{-dpdV}-\int_0^{p_2}\sqrt{-dpdV}<v_1-v_2$$

$$<-\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{-dpdV}. \qquad (93.5)$$

第一部分的头一个积分是对气体 1 进行计算的，而其余的积分是对气体 2 进行计算的. 对于理想气体，则有

$$-\frac{2c_1}{\gamma_1-1}-\frac{2c_2}{\gamma_2-1}<v_1-v_2$$

$$<-\frac{2c_2}{\gamma_2-1}\left[1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma_2-1)/2\gamma_2}\right], \qquad (93.6)$$

式中，

$$c_1=\sqrt{\gamma_1 p_1 V_1},\quad c_2=\sqrt{\gamma_2 p_2 V_2}.$$

如果

$$v_1 - v_2 < -\frac{2c_1}{\gamma_1 - 1} - \frac{2c_2}{\gamma_2 - 1}, \tag{93.7}$$

则在稀疏波($I \rightarrow R_{\leftarrow} V R_{\rightarrow}$)之间形成一个真空区.

初始条件的间断问题包括着平面间断面之间的各种碰撞情形. 在碰撞的瞬间，两个间断平面重合，并形成某种初始间断，然后导致上述某种图象. 例如，两个激波的碰撞产生出另外两个激波，这两个新产生的激波从停留在其间的切向间断面出发：$S_{\rightarrow} S_{\leftarrow} \rightarrow S_{\leftarrow} T S_{\rightarrow}$. 当一个激波赶上另一个激波时，存在着两种可能性：

$$S_{\rightarrow} S_{\rightarrow} \rightarrow S_{\leftarrow} T S_{\rightarrow} \quad 和 \quad S_{\rightarrow} S_{\rightarrow} \rightarrow R_{\leftarrow} T S_{\rightarrow}.$$

在这两种情形中，都有一个激波沿着原来的方向继续前进.

激波从切向间断面(两种介质的分界面)反射和透射的问题也属于这种问题. 这时两种可能的情形是：

$$S_{\rightarrow} T \rightarrow S_{\leftarrow} T S_{\rightarrow} \quad 和 \quad S_{\rightarrow} T \rightarrow R_{\leftarrow} T S_{\rightarrow}.$$

透射进入第二种介质的波总是一个激波(也可参看本节的问题)①.

问　　题

问题 1. 设一平面激波从刚性的平面上反射回来. 试确定反射波后面的气体压力(C. B. 伊兹麦洛夫 (C. B. Измайлов), 1935).

解： 当一个激波入射在刚性壁面上时，产生一个反射激波，朝离开固壁的方向传播. 我们用下标 1, 2 和 3 分别表示入射激波前方未经扰动的气体、入射激波后方的气体 (它也是反射激波前方的气体) 以及反射激波后方的气体中的量；见图 63，其中箭头指示激波运动和气体本身运动的方向. 邻接于固壁的 1 区和 3 区中的气体都是相对于固壁而静止的. 在入射激波和反射激波中，间断面两侧气体的相对速度是相同的，并且等于气体 2 的速度. 对

① 为了完备起见，还应该指出：当激波与弱间断面碰撞时（这个问题不属于这里所讨论的自相似类型的问题），则激波继续沿原来的方向传播，但是，在激波的后面，还有一个原来类型的弱间断面和一个弱切向间断面(参看 § 89 末).

这相对速度应用公式(92.7)，于是得$(p_2-p_1)(V_1-V_2)=(p_3-p_2)(V_2-V_3)$.

对于每一个激波，激波绝热方程(85.1)给出

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2}{(\gamma-1)p_1+(\gamma+1)p_2},$$

$$\frac{V_3}{V_2}=\frac{(\gamma+1)p_2+(\gamma-1)p_3}{(\gamma-1)p_2+(\gamma+1)p_3}.$$

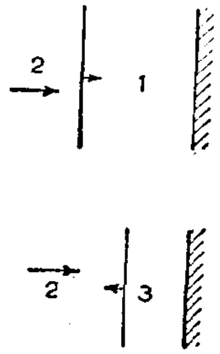


图 63

我们可以从上述三个方程消去比容，其结果为

$$(p_3-p_2)^2[(\gamma+1)p_1+(\gamma-1)p_2]$$
$$=(p_2-p_1)^2[(\gamma+1)p_3+(\gamma-1)p_2].$$

这是一个关于p_3的二次方程，它有平凡根$p_3=p_1$；消去p_3-p_1，则得

$$\frac{p_3}{p_2}=\frac{(3\gamma-1)p_2-(\gamma-1)p_1}{(\gamma-1)p_2-(\gamma+1)p_1},$$

用此式，可由p_1和p_2确定p_3. 在非常强的入射激波的极限情形下，$p_3=(3\gamma-1)p_2/(\gamma-1)$，而对于弱激波，则有$p_3-p_2=p_2-p_1$，这相当于声波近似.

问题 2. 试求激波从两种气体的分界平面上反射的条件.

解: 设在激波(在气体 2 中传播)入射到分界面以前，$p_1=p_2'$，V_1，V_2'是两种介质的压力和比容，而p_2，V_2是激波后方的压力和比容. 使反射波成为激波的条件，可用不等式(93.2)来确定，不过，此时必须令

$$v_1-v_2=\sqrt{(p_2-p_2')(V_2'-V_2)}.$$

如将所有的量用压力比p_2/p_1和初始比容V_1，V_2'来表示，则得

$$\frac{V_1}{(\gamma_1+1)p_2/p_1+(\gamma_1-1)}<\frac{V_2'}{(\gamma_2+1)p_2/p_1+(\gamma_2-1)}.$$

§94. 一维行波

在§63中讨论声波时，我们假定波中的波幅是很小的. 所以，运动方程是线性的，并且是容易求解的. 这些方程的特解是$x\pm ct$的任意函数(平面波)，它对应于保持波型不变并以速度c传播的行波. 所谓波型是指密度、速度等沿传播方向的分布. 因为在这种行波中，速度v、密度ρ和压力p(以及其余的量)都是同一个量$x\pm ct$的函数，因此，它们可以彼此表示成不显含坐标和时间的函数[如$p=p(\rho)$，$v=v(p)$，等等].

当波幅不一定很小时，这些简单关系就不成立了．但是我们发现，可以求出以平面行波形式表示的精确的运动方程的通解，而这种平面行波形式，是小波幅所适用的近似方程的解 $f(x\pm ct)$ 的推广．为了导出这种解，我们将从下述条件开始，即对于任意大小波幅的波，速度均可以表示成密度的函数．

在不出现激波的条件下，流动是绝热的．如果气体在某个初始时刻是均匀的(特别重要的是，此时有 $s=$ 常数)，则不论什么时刻都有 $s=$ 常数．我们在下面就将这样假定．

沿 x 方向传播的平面声波，所有的量都只依赖于 x 和 t，同时对于速度而言，有 $v_x=v, v_y=v_z=0$．所以，连续方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}=0,$$

欧拉方程为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0.$$

v 只是 ρ 的函数，利用这一点，可以将上述两个方程写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{d(\rho v)}{d\rho}\ \frac{\partial\rho}{\partial x}=0, \tag{94.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\left(v+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{94.2}$$

因为

$$\frac{\partial\rho/\partial t}{\partial\rho/\partial x}=-\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho,$$

所以，由方程(94.1)得

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho=\frac{d(\rho v)}{d\rho}=v+\rho\frac{dv}{d\rho},$$

类似地，由方程(94.2)得

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v=v+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial v}. \tag{94.3}$$

由于由 ρ 的值可唯一地确定 v 的值，因而以 ρ 为常数的导数和以 v 为常数的导数相同，即 $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v$，于是 $\rho\frac{dv}{d\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}$. 写出 $\frac{dp}{dv}=\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{dv}=c^2\frac{d\rho}{dv}$，我们得 $\frac{dv}{d\rho}=\pm\frac{c}{\rho}$，因此

$$v=\pm\int\frac{c}{\rho}d\rho=\pm\int\frac{dp}{\rho c}. \qquad (94.4)$$

由此给出波中速度和密度或压力之间的普遍关系式①.

其次，联立式(94.3)和(94.4)，可求出 $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v=v+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dv}=v\pm c(v)$，或者，积分后得

$$x=t[v\pm c(v)]+f(v), \qquad (94.5)$$

其中 $f(v)$ 是速度的任意函数，而 $c(v)$ 由公式(94.4)确定.

公式(94.4)和(94.5)给出了所要求的通解(B. 黎曼，1860). 这些公式确定出速度(因而确定所有其余的量)作为 x 和 t 的隐函数关系，即每一个时刻的波型. 对于任何给定的 v 值，我们有 $x=at+b$，即速度具有给定值的点作等速运动；在这种意义上，所得的解是一个行波. 公式(94.5)中的两个符号对应于沿 x 轴的正向和负向(相对于气体)传播的波.

由解式(94.4)和(94.5)所描述的流动，通常称为简单波，以后将采用这个名词. 应该指出：§92 中所讨论的自相似流动是这种简单波的特殊情形，它相当于公式(94.5)中 $f(v)=0$ 的情形.

在理想气体的情形下，我们可以给出简单波的显函数关系；为了确定起见，我们假定波中存在一个 $v=0$ 的点，在实际问题中常常遇到这种情形. 因为公式(94.4)与(92.6)相同，所以，按照公式(92.14)—(92.16)类推，得

① 在小波幅的波中，$\rho=\rho_0+\rho'$，于是式(94.4)以一级近似给出 $v=c_0\rho'/\rho_0$(其中 $c_0=c(\rho_0)$)，即通常的公式(63.12).

$$c=c_0\pm\frac{1}{2}(\gamma-1)v, \tag{94.6}$$

$$\left.\begin{aligned}\rho&=\rho_0\left[1\pm\frac{1}{2}(\gamma-1)v/c_0\right]^{2/(\gamma-1)},\\p&=p_0\left[1\pm\frac{1}{2}(\gamma-1)v/c_0\right]^{2\gamma/(\gamma-1)}.\end{aligned}\right\} \tag{94.7}$$

将式(94.6)代入(94.5)，得

$$x=t\left[\pm c_0+\frac{1}{2}(\gamma+1)v\right]+f(v). \tag{94.8}$$

有时将这个解写成下列形式更为方便，即

$$v=F\left[x-\left(\pm c_0+\frac{\gamma+1}{2}v\right)t\right], \tag{94.9}$$

其中，F 是另一个任意函数.

从公式(94.6)和(94.7)还可以看出(如§92中一样)：与波的传播方向(相对于气体本身)相反的速度是有界值；对于沿 x 轴的正向传播的波，我们有

$$-v\leqslant 2c_0/(\gamma-1). \tag{94.10}$$

公式(94.4)和(94.5)所描述的行波，本质上不同于小波幅极限情形所得到的行波. 波型上点的速度为

$$u=v\pm c; \tag{94.11}$$

把它看成是两种运动的叠加也许很方便：扰动以声速相对于气体传播，以及气体本身以速度 v 运动. 速度 u 现在是密度的函数，因此，u 在波型的不同点上是不同的. 于是，在具有任意波幅的平面波的一般情形中，不存在固定不变的“波速”. 既然波型中不同点的速度是不同的，那么，随着时间的推移，波型必将改变其形状.

现在来研究沿 x 轴的正向传播的波，这时 $u=v+c$. 在§92中，曾经计算过 $v+c$ 对密度的导数，参看式(92.10). 我们已看到：

$$\frac{du}{d\rho}>0.$$

因此，波型上给定点的密度越大，其传播速度就越大．如果用 c_0 表示密度等于平衡密度 ρ_0 时的声速，则在压缩区有 $\rho>\rho_0$ 和 $c>c_0$，而在稀疏区有 $\rho<\rho_0$ 和 $c<c_0$.

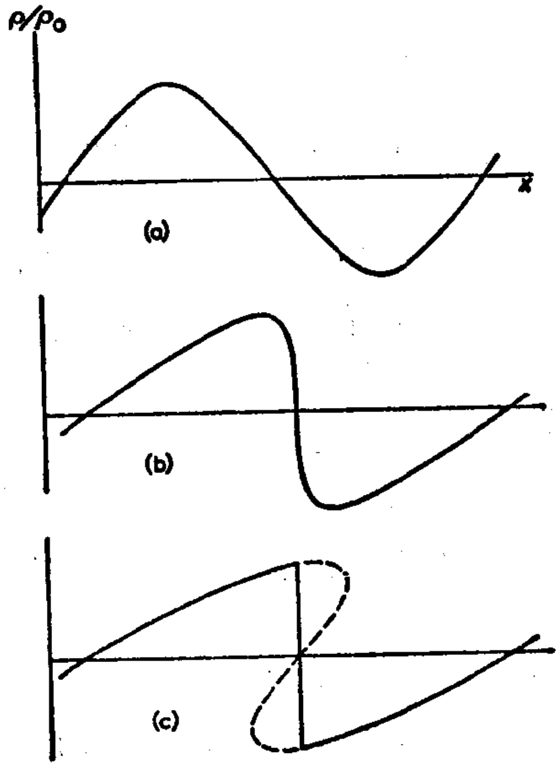


图 64

波型中不同点的速度的差异，将引起波型形状随时间而改变：压缩区的点前移，而稀疏区的点落后(图 64b)．最后，波型可以变得这样，以致函数 $\rho(x)$ (t 给定时)不再是单值的了；对应于某个 x，有三个不同的 ρ 值(图 64c 中的虚线)．当然，这在物理上是不可能的．事实上，在 ρ 为非单值的地方将形成间断面，因此，除了间断面本身外，ρ 仍然处处是单值的．于是，波型具有图 64c 中实线所示的形状．所以，在相距等于波长的那些点上将形成间断面．

当间断面形成以后，波就不再是简单波了．其原因可以简述

如下：当间断面出现时，波从这些间断面上"反射"回来，因此不再是一个单向的行波了．所以，作为整个推理基础的假定，即各量之间存在的一一对应关系，一般说来不再成立了．

如 §82 所述，间断（激波）的出现将导致能量的耗散．所以间断的形成要引起波的显著衰减．从图 64 可以看出，这是很明显的．当间断形成时，波型的最高部分被截掉了．随着时间的推移，当波型过度弯曲时，其高度变小，所以波型被"磨平"成波幅较小的波型，即波受到了衰减．

从上面可以清楚地看出：在每一个简单波中，如果存在着密度沿波传播方向而减小的区域，则最终一定要形成间断．只有一种情形不出现间断，即波中的密度沿波传播的方向是单调增加的（例如，在充满气体的无限长管道中，当活塞在管道内向外运动时，由此形成的波就是这样；参看本节末的问题）．

当间断形成之后，虽然波已不再是简单波，但是仍可以用解析的方法确定间断形成的时间和位置．我们知道，从数学上来讲，间断的产生是由于在简单波中，当时间大于某个确定的值 t_0 时，量 p,ρ 和 v 都变成了x的多值函数（t 给定时），而在$t<t_0$时，这些量则是 x 的单值函数．这个时间 t_0 就是间断形成的时间．从几何上考虑，显而易见，在时刻 t_0，v 随 x 变化的函数曲线（比如说）在某一点 $x=x_0$ 上将变得是竖向的，这个点，恰好就是函数紧接着成为多值函数的那个点．从解析的方面来说，这意味着导数$(\partial v/\partial x)_t$变成无限大，而$(\partial x/\partial v)_t$变为零．同样，显而易见，在时刻 t_0，曲线 $v=v(x)$必须在竖直切线的两边，否则，$v(x)$早就变成多值函数了．换句话说，点 $x=x_0$ 一定不是函数 $v(x)$ 的极值点，而是一个拐点，因此，二阶导数$(\partial^2x/\partial v^2)_t$也一定为零．所以，激波形成的地点和时间决定于联立方程组：

$$(\partial x/\partial v)_t=0,\ (\partial^2x/\partial v^2)_t=0 \tag{94.12}$$

如系理想气体，这些方程就是

$$t=-2f'(v)/(\gamma+1),\quad f''(v)=0, \tag{94.13}$$

其中，$f(v)$是出现在通解(94.8)中的函数.

如果简单波以静止气体为界，并且激波是在边界上形成的，则这些条件需要修正．在这种情形下，当间断出现时，曲线$v=v(x)$也必须变成竖向的，即导数$(\partial x/\partial v)_t$必须为零．但是，二阶导数不一定变为零；这时，第二个条件就是在静止气体的边界上速度为零，所以当$v=0$时，$(\partial x/\partial v)_t=0$．根据这些条件，我们可以求得形成间断面的时间和地点的显式．将式(94.5)微分，得

$$t=-f'(0)/\alpha_0;\quad x=\pm c_0t+f(0), \tag{94.14}$$

其中α_0是由公式(95.2)所定义的量α在$v=0$时的值．对于理想气体，则

$$t=-2f'(0)/(\gamma+1). \tag{94.15}$$

问　题

问题 1. 设理想气体充满半无限圆柱形管道($x>0$)，管的一端以活塞为界．在时间$t=0$时，活塞开始以等加速的速度$U=\pm at$运动．试确定由此产生的流动．

解： 如果活塞向外运动($U=-at$)，则产生一简单稀疏波，其前阵面穿过静止气体以速度c_0向右传播；在$x>c_0t$的区域中，气体是静止的．在活塞的表面上，气体和活塞必有相同的速度，即当$x=-\frac{1}{2}at^2\ (t>0)$时，必有$v=-at$.

这个条件给出式(94.8)中的函数$f(v)$：

$$f(-at)=-c_0t+\frac{1}{2}\gamma at^2.$$

于是得

$$x-\left[c_0+\frac{1}{2}(\gamma+1)v\right]t=f(v)=c_0v/a+\frac{1}{2}\gamma v^2/a,$$

由此

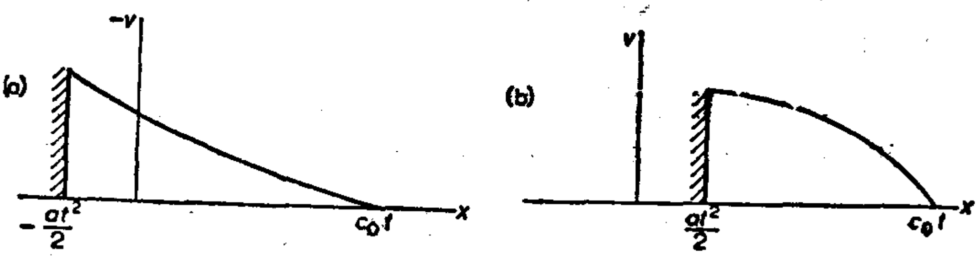


图 65

$$-v=\left[c_0+\frac{1}{2}(\gamma+1)at\right]\Big/\gamma$$
$$-\sqrt{\left\{\left[c_0+\frac{1}{2}(\gamma+1)at\right]^2-2a\gamma(c_0t-x)\right\}\Big/\gamma}. \qquad (1)$$

在 $t=0$ 到 $t=2c_0/(\gamma-1)a$ 的时间内，这个公式给出活塞与波的前阵面 $x=c_0t$ 之间整个区域内(图 65a)的速度变化规律. 各处气体的速度都指向左面，与活塞的运动方向相同，并且速度的大小沿 x 轴的正向单调地减少；密度和压力则沿 x 轴的正向单调地增加. 当 $t>2c_0/(\gamma-1)a$ 时，不等式(94.10)对活塞的速度不再成立，因而气体不可能再跟着活塞一起运动. 于是，在紧接活塞的一个区域中形成真空；在真空区域以外，气体的速度按公式(1)从 $-2c_0/(\gamma-1)$ 减小到零.

如果活塞向内运动($U=at$)，则形成一简单压缩波；只要改变式(1)中 a 的符号，就可以得到相应的解(图 65b). 但是，它只适用到激波形成以前；激波出现的时间由公式(94.15)确定，即

$$t=2c_0/a(\gamma+1).$$

问题 2. 与问题 1 相同，但活塞可按任何一种规律运动.

解: 设在 $t=0$ 时，活塞开始按 $x=X(t)$ 的规律运动(且 $X(0)=0$)；其速度为 $U=X'(t)$. 由活塞上的边界条件(当 $x=X$ 时，$v=U$)得出 $v=X'(t)$，$f(v)=X(t)-t\left[c_0+\frac{1}{2}(\gamma+1)X'(t)\right]$. 如果现在把 t 当作参数，则这两个方程以参数形式确定了函数 $f(v)$. 把参数记作 τ，我们可以将解写为

$$v=X'(\tau), \qquad (1)$$
$$x=X(\tau)+(t-\tau)\left[c_0+\frac{1}{2}(\gamma+1)X'(\tau)\right],$$

在由活塞运动所引起的简单波中，方程(1)以参数形式确定出所要求的函数 $v(t,x)$.

问题 3. 试确定当活塞(问题 1)按规律 $U=at^n(n>0)$ 运动时激波形成的时间和地点.

解: 如果 $a<0$，即活塞向外运动，则产生一简单稀疏波，其中没有激波出现. 所以假定 $a>0$，即活塞向内运动，由此产生一简单压缩波.

当函数 $v(x,t)$ 由参数方程(1)(问题 2)给定，且 $X=\frac{a\tau^{n+1}}{n+1}$时，则确定激波形成的时间和地点的方程为

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\right)_t&=-c_0+\frac{1}{2}t\tau^{n-1}an(\gamma+1)\\&\quad-\frac{1}{2}a\tau^n[\gamma-1+n(\gamma+1)]=0,\\\left(\frac{\partial^2x}{\partial\tau^2}\right)_t&=\frac{1}{2}t\tau^{n-2}an(n-1)(\gamma+1)\\&\quad-\frac{1}{2}an\tau^{n-1}[\gamma-1+n(\gamma+1)]=0,\end{aligned}\tag{1}$$

如果我们考虑的是激波在简单波的前阵面上形成，则应该用 $\tau=0$ 来代替第二个方程.

当 $n=1$ 时，我们求得 $\tau=0$，$t=2c_0/a(\gamma+1)$，

即在运动开始后经过有限的时间，激波就在前阵面上形成，这与问题 1 的结论相符.

当 $n<1$ 时，在任何 $t>0$ 的情形，导数 $\partial x/\partial\tau$ 都要变号(因此，对于给定的 t，函数 $v(x)$ 将是多值的). 这意味着当活塞一开始运动，激波就立即在活塞上形成.

当 $n>1$ 时，激波不是在简单波的前阵面上形成，而是在由式(1)决定的某个中间的位置上形成. 由公式(1)先定出 τ 和 t，然后再根据问题 2 中的式(1)，就可以求得间断面形成的地点. 其结果为

$$t=\left(\frac{2c_0}{a}\right)^{1/n}\frac{1}{\gamma+1}\left[\frac{n+1}{n-1}\gamma+1\right]^{(n-1)/n},$$

$$x=2c_0\left(\frac{2c_0}{a}\right)^{1/n}\left[\frac{\gamma}{\gamma+1}+\frac{n-1}{n+1}\right]\cdot\frac{1}{(n-1)^{(n-1)/n}[\gamma-1+n(\gamma+1)]^{1/n}}.$$

§95. 声波中间断的形成

作为运动方程精确解的行波型平面声波，也是一个简单波. 利用§94中所得到的一般结果，可以导出二级近似中小波幅声波的若干性质(一级近似给出通常的线性波动方程).

首先应该指出：在每一个声波波长的位置上，一定会出现间断.

正如§94所述，这样会引起波的非常显著的衰减. 但是必须说明的是，这种情况只发生在足够强的声波中；在波幅的高阶效应得以显示之前，弱声波已被通常的粘性和导热效应衰减掉了.

波型的畸变还有另一种效果. 如果在某个时刻波是纯粹的谐波，则在以后的时刻，由于波型形状的改变，波就不再是纯粹的谐波了. 但是，运动仍然是周期性的，并具有和以前一样的周期. 这时将波展成傅里叶级数时，不但有频率为ω的项，而且还有频率为$n\omega$的项(n是整数，ω是基频). 因此，声波传播中波型的畸变，可以认为是除了基频之外，还出现了更高的谐频.

在一级近似中，可于式(94.11)中令$v=0$，即令$u=c_0$，就可以得到波型中点的速度u(波沿x轴的正向传播时)，这相当于波在传播中不改变波型. 在二级近似中，则得

$$u=c_0+\rho'\partial u/\partial\rho_0=c_0+(\partial u/\partial\rho_0)\rho_0 v/c_0,$$

或者，利用导数$\partial u/\partial\rho$的表达式(92.10)，得

$$u=c_0+\alpha_0 v, \tag{95.1}$$

为了简单起见，这里已设

$$\alpha=(c^4/2V^3)(\partial^2V/\partial p^2)_s. \tag{95.2}$$

对于完全气体，

$$\alpha=\frac{1}{2}(\gamma+1),$$

所以公式(95.1)与速度 u 的精确公式[参看式(94.8)]相同.

在任意波幅的一般情形中,当间断出现之后,波已不再是简单波了. 但是在二级近似中, 即使出现了间断, 小波幅的波仍然是简单波. 这可以从下面看出:因为激波上的速度、压力和比容的变化存在着关系式 $v_2-v_1=\sqrt{(p_2-p_1)(V_1-V_2)}$, 所以在 x 轴的一段上,简单波中的速度 v 的变化为

$$v_2-v_1=\int_{p_1}^{p_2}\sqrt{-\partial V/\partial p}\,dp.$$

利用级数展开式进行简单的计算, 表明这两个表达式只在三阶项上不同(应该记住,间断面上熵的改变是一个三阶的小量, 而在简单波中熵是不变的). 由此可见, 直到二级近似,声波中的间断面两侧仍然是简单波, 只是在间断面上要满足一定的边界条件. 在更高级的近似中, 由于出现了间断面上的反射波, 上述结论不再成立.

现在, 我们来导出确定行波型声波中间断面位置的条件 (也用二级近似). 设在固定坐标系中, u 是间断面的速度, v_1, v_2 是间断面两边的气体速度. 于是,质量通量连续的条件为 $\rho_1(v_1-u)=\rho_2(v_2-u)$, 由此得出 $u=(\rho_1v_1-\rho_2v_2)/(\rho_1-\rho_2)$. 仅取到二阶项,上式相当于$v$等于$\frac{1}{2}(v_1+v_2)$的点上的导数 $d(\rho v)d\rho$:

$$u=[d(\rho v)/d\rho]_{v=\frac{1}{2}(v_1+v_2)}.$$

因为在简单波中,$d(\rho v)/d\rho=v+c$,于是由式(95.1)得

$$u=c_0+\frac{1}{2}\alpha(v_1+v_2). \tag{95.3}$$

由此, 我们可以得到确定激波位置的下述简单的几何条件. 图 66 中的曲线画出了相应的简单波的速度波型;设 ae 是间断面. 图上阴影部分面积abc和面积cde之差,就是沿曲线 $abcde$ 的积分:

$$\int_{v_1}^{v_2}(x-x_0)dv.$$

随着时间的推移，波型在移动；我们来计算上述积分对时间的导数．因为波型中点的速度 dx/dt 由公式(95.1)给出，而间断面的速度 dx_0/dt 由公式(95.3)给出，于是得

$$\frac{d}{dt}\int_{v_1}^{v_2}(x-x_0)dv=\alpha\left\{\int_{v_1}^{v_2}vdv-\frac{1}{2}(v_1+v_2)\int_{v_1}^{v_2}dv\right\}=0;$$

在对上述积分求微分时必须注意，虽然积分限 v_1 和 v_2 都随时间而变化，但是在积分限上，$x-x_0$ 的值总是为零，因此只需对被积函数进行微分就可以了．

于是，得出积分 $\int(x-x_0)dv$ 不随时间变化．正由于当激波形成时(这时点 a 和 e 重合)上述积分为零，因而我们总有

$$\int_{abcde}(x-x_0)dv=0. \tag{95.4}$$

在几何上，上式意味着面积 abc 和面积 cde 相等，这就是确定间断面位置的条件．

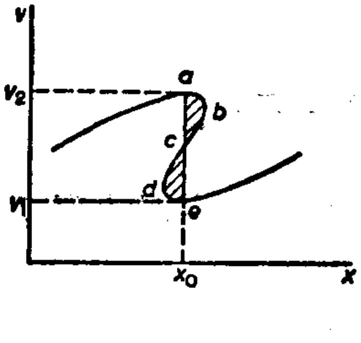


图 66

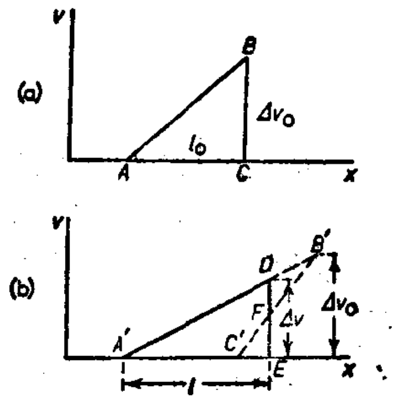


图 67

现在来研究单个的一维压缩脉冲，其中激波早已形成，同时要阐明这个激波最后是如何衰减的．这么做，我们还可以求出任何平面激波经过足够长的时间传播之后的衰减规律．

在压缩脉冲传播的后期，带有激波的声脉冲将有三角形的速

度波型．设在某个时刻(此时取成 $t=0$)由三角形 ABC(图 67a)给出速度波型．如果该波型中的点以式(95.1)所表示的速度移动，我们就可以得到 t 时刻以后的速度波型 $A'B'C'$(图 67b)．但是在实际上，间断面只移动到点 E，所以真正的速度波型是 $A'DE$．根据式(95.4)，面积 $DB'F$ 和面积 $C'FE$ 相等，因此新波型的面积 $A'DE$ 等于原来波型的面积 ABC．设 l 是时刻 t 的声脉冲长度，Δv 是激波上的速度间断，在 t 时间中，点 B 相对于点 C 移过一个距离 $\alpha t\Delta v_0$；于是角 $B'A'C'$ 的正切就等于 $\Delta v_0/(l_0+\alpha t\Delta v_0)$，因此得到面积 ABC 和 $A'DE$ 相等的条件为下列形式：

$$l_0\Delta v_0=l^2\Delta v_0/(l_0+\alpha t\Delta v_0),$$

由此得

$$l=l_0\sqrt{1+\alpha\Delta v_0 t/l_0},$$
$$\Delta v=\Delta v_0/\sqrt{1+\alpha\Delta v_0 t/l_0}. \tag{95.5}$$

当 $t\to\infty$ 时，激波强度以 $1/\sqrt{t}$ 的规律随时间的推移而渐近地趋于零(或者，以 $1/\sqrt{x}$ 的规律随传播距离的增加而渐近地趋于零，结果是一样的)．(波阵面上每单位面积的)行移声脉冲的总能量为

$$E=\rho_0\int v^2\,dx=E_0/\sqrt{1+\alpha\Delta v_0 t/l_0}, \tag{95.6}$$

其中 E_0 是时刻 $t=0$ 时的能量．当 $t\to\infty$ 时，能量也随 $1/\sqrt{t}$ 而趋向于零．

如果是一个球面的出射声波，则在离开原点足够大的距离 r 上，波阵面上任何一个小部分都可以认为是平面．于是，波型上任何一点的速度由公式(95.1)确定．但是，如果我们希望在一个较长的时间过程中，能够应用这个公式来得出波型上任何一点的移动，则必须考虑到这样一个事实：即使在一级近似中，球面波的波幅也是反比于距离 r 而减小的．这意味着与平面波的情形不同，

在球面波型中的任何给定点上，速度 v 并不是恒定的，而是随 $1/r$ 而减小的．如果 v_0 是在(很大)距离 r_0 上的 v 值(就波型中给定的点而言)，则可以写出 $v=\frac{v_0r_0}{r}$．因此波型中各点的速度 u 为 $u=c_0+\alpha v_0r_0/r$．其中第一项就是通常的声速，它对应于波型形状不变(除波幅随 $1/r$ 的普遍减小外)的一种波的移动．第二项则导致波型的畸变．将这项乘以 dr/c_0，并且从 r_0 积分到 r，就得到波型中的点在 $t=(r-r_0)/c$ 时间内的附加位移 δr；由此得出

$$\delta r=(\alpha v_0r_0/c_0)\ln(r/r_0). \tag{95.7}$$

因此，球面波波型的畸变随距离的对数而增加，即比平面波的畸变要慢得很多，在平面波中，畸变位移 δx 是随波传过的距离 x 而增加的．

波型的畸变最终要导致波型中形成间断．现在来研究单个球面声脉冲距离声源(原点)很远的地方所形成的激波．球面情形与平面情形的主要区别，在于压缩区后一定跟着一个稀疏区；波中气体质点的速度和超压都必须变号(参看§69)．波型的畸变最终会导致形成两个激波：一个在压缩区，而另一个在稀疏区(图 68)①．在前面的这个激波上，压力突然增加，随后逐渐下降成为稀疏区，然后在第二个激波上又突然增加（但并不是增加到未扰动时的压力值，而只能在第二个激波的后面渐近地趋向于它）．

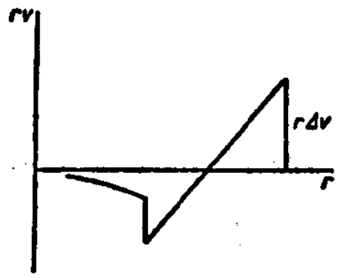


图 68

关于激波随时间(或者，以同样的方式，随离开声源的距离 r)

① 应该指出：由于声波在气体中传播时总是存在着普通的衰减(由粘性和导热所引起的衰减)；所以球面波中畸变的变缓会有下述结果，即在间断面能够形成之前，波就已经被衰减了．

的后期衰变规律，用以前讨论平面波情形完全相同的方法，就很容易求得．利用式(95.7)，在足够远的距离上，我们求得声脉冲宽度l(两个间断面之间的距离)随$\ln^{\frac{1}{2}}(r/a)$而增加，而不像平面波情形那样随$\sqrt{x}$而增加；a是某个常数．前一个激波强度的衰减规律为$r\Delta v\sim 1/\ln^{\frac{1}{2}}(r/a)$，或

$$\Delta v\sim\frac{1}{r\ln^{\frac{1}{2}}(r/a)}. \tag{95.8}$$

最后来研究柱面波的情形．出射声波波幅的普通衰减反比于$\sqrt{r}$，其中r是离中心轴的距离．重复对球面情形所作的分析，即求得波型中各点的速度u为$u=c_0+\alpha v_0\sqrt{r_0/r}$，由此得出$r_0$和$r$之间波型中各点的位移$\delta r$为

$$\delta r=2\alpha(v_0/c_0)\sqrt{r_0}(\sqrt{r}-\sqrt{r_0}). \tag{95.9}$$

和球面波的情形一样，伴随着压缩脉冲的柱面波传播，其压缩区后一定会有一个气体的稀疏区．于是，在这种情形下，一定会形成两个激波．根据同样的讨论方法，我们求得脉冲宽度的后期增长规律：$l\sim r^{1/4}$，以及激波强度的后期衰减规律：$\sqrt{r}\,\Delta v\sim r^{-1/4}$，即

$$\Delta v\sim r^{-3/4}. \tag{95.10}$$

在流动的外部条件没有任何奇性的情形下，间断在声波中的形成，就是自发出现激波的一个例子．必须强调指出：虽然激波可以在特定的时刻自发地出现，但是却不能以同样的方式自发地消失．激波一旦形成，就只能随着时间趋向无限而逐渐地衰减．

问　题

问题 1. 设在初始时刻，波型由无限多个“锯齿”形组成，如图 69 所示，试确定波型和能量随时间的变化．

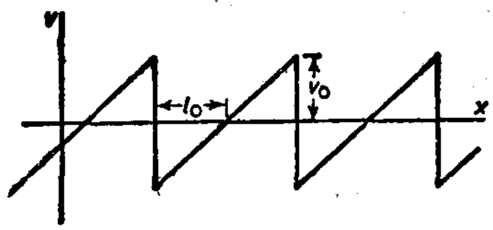


图 69

解： 显然，在以后的任何时刻，波型仍然是锯齿形，其宽度 l_0 不变，但其高度 v_t 小于 v_0. 现在来研究其中一个锯齿：在 $t=0$ 的时刻，通过锯齿上 $v=v_t$ 的那个点的纵轴，把三角形底边截去一段 $v_t l_0/v_0$. 而在经过时间 t 的过程中，这个点向前移动了一个距离 $\alpha v_t t$. 于是，三角形底边长度不变的条件为 $v_t l_0/v_0+\alpha t v_t=l_0$，因此 $v_t=v_0/(1+\alpha v_0 t/l_0)$. 当 $t\to\infty$ 时，则波幅随 $1/t$ 而减小. 能量为 $E=E_0/(1+\alpha v_0 t/l_0)^2$，也就是说，当 $t\to\infty$ 时，能量随 $1/t^2$ 而减小.

问题 2. 试确定由球面单色波波型畸变所产生的二次谐波的强度.

解： 将此波写成如下形式：

$$rv=A\cos(kr-\omega t),$$

在一级近似中，可以通过把 δr 加到这个方程右边的 r 上来考虑畸变，再按 δr 的幂展开. 根据式(95.7)，则有

$$rv=A\cos(kr-\omega t)-(\alpha k/2c_0)A^2\ln(r/r_0)\sin 2(kr-\omega t);$$

这里必须将 r_0 取成这样一个距离，在这个距离上，仍然可以足够精确地把波看成是严格的单色波. 这个公式中的第二项就是波谱分解中的二次谐波. 其总(按时间平均)强度 I_2 为

$$I_2=(\alpha^2k^2/8\pi c_0^3\rho_0)\ln^2(r/r_0)I_1^2,$$

其中，$I_1=2\pi c_0\rho_0A^2$ 是一次谐波的强度.

§ 96. 特征线

在 § 79 中，特征线被定义为小扰动传播（在几何声学的近似中）所沿的曲线，这个定义是普遍适用的，并不局限于 § 79 中所讨论的平面定常超声速流动.

在一维不定常流动的情形，我们可以引用特征线作为 xt 平面上的一条曲线，它的斜率 dx/dt 等于小扰动相对于固定坐标系的

传播速度．相对于气体以声速朝 x 轴的正向或负向传播的扰动，相对于固定坐标系则以速度 $v\pm c$ 移动．于是，我们称之为 C_+ 和 C_- 的这两族特征线的微分方程为

$$(dx/dt)_+=v+c,\ (dx/dt)_-=v-c \tag{96.1}$$

随同气体传递的扰动，在 xt 平面上沿第三族特征线 C_0 传播，其微分方程为

$$(dx/dt)_0=v. \tag{96.2}$$

第三族特征线是 xt 平面上的"流线"；参看 §79 末①．必须强调指出，特征线的存在不再要求气体的流动是超声速的．由特征线所显示的扰动的"定向"传播，在这里只是说明先后运动之间的因果关系而已．

作为一个例子，现在来研究简单波的特征线．如果是一个沿 x 轴的正向传播的波，根据式(94.5)，便有 $x=t(v+c)+f(v)$．微分这个关系式，则得

$$dx=(v+c)dt+[t+tc'(v)+f'(v)]dv.$$

沿特征线 C_+，我们有 $dx=(v+c)dt$；比较这两个方程，可求得沿该特征线上 $[t+tc'v)+f'(v)]dv=0$．方括号内的表达式不能恒等于零，于是 $dv=0$，即 $v=$ 常数．因此得出结论，沿任何一条特征线 C_+，其速度不变，由此得出所有的量也是不变的．在向左传播的波中，特征线 C_- 上也具有同样的性质．在 §97 中将看到，这并不是偶然的，而是简单波特性的一个数学结论．

根据简单波中特征线 C_+ 的这个性质，我们可以断定：C_+ 是 xt 平面上的一族直线，沿着这些直线 $x=t[v+c(v)]+f(v)$（式(94.5)），其速度不变．特别是，在自相似稀疏波（$f(v)=0$ 的简单波）的情况，这些直线在 xt 平面上形成一族通过原点的直线束．根

① 对于不定常的球对称流动，如果用径向坐标 r 来代替 x，则由同样的方程组(96.1)和(96.2)也可确定特征线（此时，特征线是 rt 平面上的曲线）．

据这个理由，自相似简单波有时也称为有心波.

图 70 中画的是当活塞在管道中加速地向外运动时，所形成的简单稀疏波的特征线族 C_+. 这是一族发散的直线，它们都是从代表活塞运动的曲线 $x=X(t)$上发出的. 特征线 $x=c_0t$ 的右边是静止气体的区域，其中的所有特征线都变成相互平行的直线.

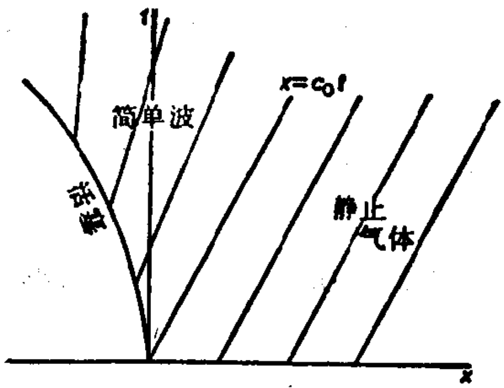


图 70

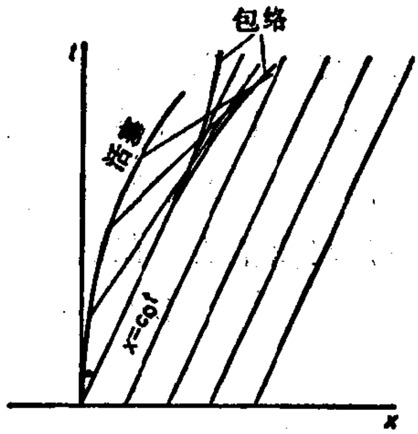


图 71

图 71 中画出了类似的图线，即当活塞在管道中加速地向内运动时，所形成的简单压缩波的特征线族. 在这种情形下，特征线 C_+ 是一族收敛的直线，它们最终必定相交. 因为每一条特征线都有恒定的 v 值，所以，它们的相交表明函数 $v(x, t)$是多值的，这在物理上是没有意义的. 这就是 § 94 中所得到的结果的几何解释，即简单压缩波不可能无限制地存在，简单压缩波中一定会形成激波. 关于确定激波形成的时间和地点的条件(94.12)，其几何解释如下：相交的直线形特征线族具有一条包络线，该包络线在 t 的某个最小值上有一个尖点；这个最小的 t 值给出了最早出现函数多值性的时刻. 在两支包络线之间的区域中，每一个点都位于三条特征线 C_+上. 如果将特征线方程用参数形式给出，即 $x=x(v)$，$t=t(v)$，则尖点的位置由方程(94.12)确定①.

① 激波发生在静止气体边界上的特殊情形，对应于包络线的一支是特征线 $x=c_0t$ 的一部分.

上面已提到特征线的物理定义为小扰动传播所沿着的曲线，现在，我们要简要地指出，这个关于特征线的物理定义如何对应于偏微分方程中有关特征线的数学含义．兹考虑这种形式的偏微分方程：

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+D=0, \qquad (96.3)$$

它的二阶导数是线性的；系数 A,B,C,D 可以是两个自变量 x,t、未知函数 ϕ 及其一阶导数的任何函数①．如果处处有 $B^2-AC<0$，则方程(96.3)是椭圆型的；如果处处有 $B^2-AC>0$，则方程(96.3)是双曲型的．在后一种情形下，方程

$$Adt^2-2Bdxdt+Cdx^2=0, \qquad (96.4)$$

或

$$\frac{dx}{dt}=\frac{B\pm\sqrt{(B^2-AC)}}{C} \qquad (96.5)$$

确定了 xt 平面上的两族曲线，即**特征线**（对方程(96.3)的一个给定的解 $\phi(x,y)$ 而言）．可以指出：如果系数 A,B,C 只是 x 和 t 的函数，则特征线不依赖于特定的解 ϕ．

设所给的流动对应于方程(96.3)的某个解 $\phi=\phi_0(x,t)$，然后再叠加上一个小扰动 ϕ_1．假定小扰动满足几何声学成立的条件，即小扰动对流动的影响是轻微的（也就是说，ϕ_1 及其一阶导数均很小），但经过一小段距离以后就有显著的变化（即 ϕ_1 的二阶导数相对地说是大的）．在方程(96.3)中，令 $\phi=\phi_0+\phi_1$，就可以得到 ϕ_1 的方程为

$$A\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}=0,$$

其系数 A,B,C 中，令 $\phi=\phi_0$．仿照波动光学变到几何光学所采用

① 在一维不定常流动中，速度势满足这种形式的方程．

的方法，写出 $\phi_1=ae^{i\psi}$，其中的函数 ψ（程函）很大，则得

$$A\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}+C\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=0. \tag{96.6}$$

令 dx/dt 等于群速度，就得到几何声学中声波传播的射线方程：$\frac{dx}{dt}=\frac{d\omega}{dk}$，式中，$k=\partial\psi/\partial x$，$\omega=-\partial\psi/\partial t$. 对关系式$Ak^2-2Bk\omega+C\omega^2=0$，微分则得 $\frac{dx}{dt}=\frac{B\omega-Ak}{C\omega-Bk}$，然后再用同样的关系式消去 k/ω，我们又得到方程(96.5)。

问　　题

试求出有心简单波中第二族特征线的方程.

解： 在向右边静止气体中传播的有心简单波中，我们有 $\frac{x}{t}=v+c=c_0+\frac{1}{2}(\gamma+1)v$. 特征线 C_+ 由射线 $x=$常数$\times t$ 组成. 另一方面，特征线 C_- 由下列方程确定：

$$\frac{dx}{dt}=v-c=\frac{3-\gamma}{\gamma+1}\frac{x}{t}-\frac{4}{\gamma+1}c_0.$$

积分后，得

$$x=-\frac{2}{\gamma-1}c_0t+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_0t_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{(3-\gamma)/(\gamma+1)},$$

其中积分常数已经这样选定，使得特征线 C_- 通过特征线 $C_+(x=c_0t)$ 上的一点：$x=c_0t, t=t_0$. 特征线 $x=c_0t$ 是简单波与静止气体区域之间的分界线.

xt 平面上的“流线”，由下列方程确定：

$$\frac{dx}{dt}=v=\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t}-c_0\right),$$

由此得出

$$x=-\frac{2}{\gamma+1}c_0t+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}c_0t_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(\gamma+1)}.$$

§ 97. 黎曼不变量

一般说来，任意的小扰动都将沿着由 xt 平面上给定点出发的三条特征线(C_+, C_-, C_0)传播．但是，任意一个扰动都可分成几部分，其中的每一部分只沿一条特征线传播．

首先来研究气体的等熵流动．将连续方程和欧拉方程写成如下形式：

$$\frac{\partial p}{\partial t}+v\frac{\partial p}{\partial x}+\rho c^2\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0;$$

在连续方程中，已将密度的导数换成压力的导数，这是利用了公式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

将第一个方程除以 $\pm\rho c$，并与第二个方程相加，得

$$\frac{\partial v}{\partial t}\pm\frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\pm\frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}\right)(v\pm c)=0. \qquad (97.1)$$

现在引用新的未知函数：

$$J_+=v+\int\frac{dp}{\rho c}, \qquad J_-=v-\int\frac{dp}{\rho c}, \qquad (97.2)$$

式中 J_+ 和 J_- 称为黎曼不变量．应该记住，在等熵流动中，ρ 和 c 都是 p 的确定函数，因此式(97.2)右边的积分也是 p 的确定函数．对于完全气体而言，有

$$J_+=v+\frac{2c}{\gamma-1}, \qquad J_-=v-\frac{2c}{\gamma-1}. \qquad (97.3)$$

用 J_+ 和 J_- 来表示，运动方程取下述简单的形式：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(v+c)\frac{\partial}{\partial x}\right]J_+=0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(v-c)\frac{\partial}{\partial x}\right]J_-=0. \qquad (97.4)$$

作用在 J_+ 和 J_- 上的微分算子恰好是在 xt 平面上沿特征线 C_+ 和 C_- 的微分算子. 由此看出，J_+ 和 J_- 分别沿各自的特征线 C_+ 和 C_- 保持不变. 也可以说，J_+ 的小扰动只沿特征线 C_+ 传播，而 J^- 的小扰动则只沿特征线 C_- 传播.

在非等熵流动的一般情形下，方程(97.1)不能写成方程(97.4)的形式，因为 $dp/\rho c$ 不是全微分. 但是，这些方程仍然可以把只沿某一族特征线传播的扰动分开. 这时，扰动的形式为($\delta v\pm\delta p/\rho c$，其中 δv 和 δp 是速度和压力的任意的小扰动. 为了得到完备的运动方程组，方程(97.1)必须附加上绝热方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x}\right]s=0, \qquad (97.5)$$

上式表示扰动量 δs 沿特征线 C_0 传播. 任意一个小扰动总可以分成上述三种互相独立的部分.

与公式(94.4)相比，可知黎曼不变量(97.2) 就是简单波中在整个流动区域内始终保持不变的量：在向右传播的简单波中，J_- 是不变的，而在向左传播的简单波中，J_+ 是不变的. 在数学上，这是简单波的基本性质，特别是由此可以得出 §96 中所述的性质：其中一族特征线由直线组成. 比如说，波向右传播时就是这样的. 每一条特征线 C_+ 有一个不变的 J_+ 值，而且还有一个不变的 J_- 值，在整个区域内处处是相同的. 既然在每一条特征线 C_+ 上 J_+ 和 J_- 都是不变的，由此可知 v 和 p (以及其余所有的量) 也是不变的，于是得到 § 96 中所导出的特

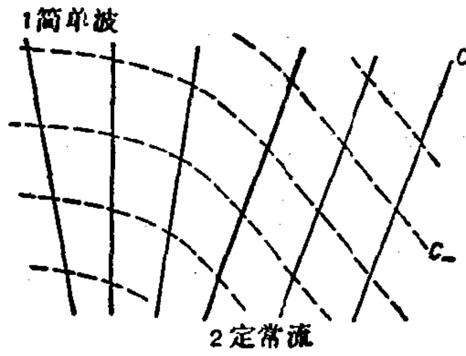


图 72

征线C_+的性质，即再一次证明了它们都是直线.

在 xt 平面上相邻的两个区域中，如果流动由运动方程的两个不同的解析解所描述，则这两个区域之间的分界线是一条特征线. 因为这条分界线是某些量的导数的间断线，即弱间断线，所以，它必然与某一特征线重合.

简单波的下述性质在一维等熵流动理论中是非常重要的：与均匀流动区域(其中 v= 常数，p= 常数)邻接的区域中，流动一定是一简单波.

这个论断是很容易证明的. 设 xt 平面上的 1 区与右面均匀流动的 2 区接界(图 72). 在 2 区中，两个不变量 J_+ 和 J_- 显然都是常数，这两族特征线都是直线. 这两个区域之间的分界线是一条特征线 C_+，而且一个区域的特征线 C_+ 不能进入另一个区域. 但是，特征线 C_- 可以从一个区域连续地进入另一个区域，同时从 2 区带着不变的 J_- 值进入 1 区. 于是在整个 1 区中，J_- 也是常数，所以，1 区的流动也是一个简单波.

特征线具有"传递"某些量的不变值的性能，这有助于我们说明有关流体动力学方程组初始条件和边界条件的一般问题. 在一些有物理意义的特殊问题中，有关这些条件的选取通常是不存在什么疑问的，它们是由物理上的考虑来决定的. 然而在更为复杂的问题中，基于特征线一般性质的数学考虑将是有益的.

为了确定起见，我们来讨论气体的一维等熵流动. 在数学上，气体动力学的问题通常归结为：假设已知在 xt 平面上两条给定曲线(图 73a 中的 OA 和 OB)上的边界条件，要确定这两条给定曲线之间的区域内的两个未知函数(例如 v 和 p). 现在的问题，是求出这些曲线上到底有多少个量可以取给定的值. 在这方面，曲线上每一点都发出两条特征线 C_+ 和 C_-①，最重要的是要知道每条曲

① 在 xt 平面上，从给定点发出的特征线是指向 t 增加的方向的.

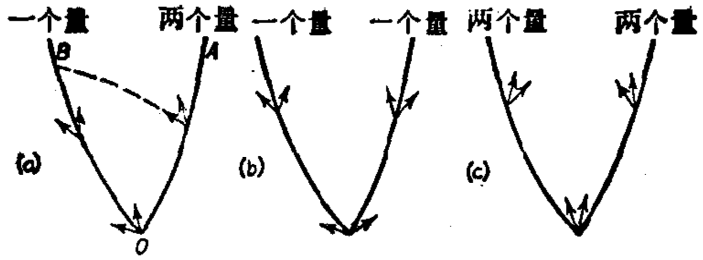


图 73

线相对于这些特征线方向(在图 73 中由箭头表示)的位置如何．这里可能出现两种情形：或者是两条特征线同在该曲线的一侧，或者是两条特征线分别在该曲线的两侧．在图 73a 中，曲线 OA 属于第一种情形，而曲线 OB 属于第二种情形．显然，为了在区域 AOB 中完全确定出未知函数，必须在曲线 OA 上给出两个量的值(例如两个不变量 J_+ 和 J_-)，而在曲线 OB 上，只需给出其中一个量的值．因为另一个量的值，将由相应族的特征线从曲线 OA "传送"到曲线 OB，所以不可能任意地给定①．类似地，图 73b 和 c 中分别画出了每一个边界上给出一个量和两个量的情形．

还应该指出：如果边界曲线和任一条特征线重合，则在这条边界上就不能规定两个独立量的值，因为它们的值是由相应的黎曼不变量为常数的条件相互联系着．

对于非等熵流动的一般情形，可以用完全类似的方法来讨论如何规定边界条件的问题．

最后，我们还要说明一下．以上所提到的一维流动的特征线都是 xt 平面上的曲线．但是，特征线也可以定义在任何两个描写流动的变量的平面上．例如，可以考虑 vc 平面上的特征线．若是

① 关于这种情形，可以举个实例如下：即活塞在无限长管道内向里或向外运动时所形成的气体流动．这里所涉及的是，在 xt 平面上的正向的 x 轴与确定活塞运动的曲线 $x=X(t)$ 这样两条曲线之间的区域内，求解气体动力学方程组(图 70，图 71)．在第一条曲线上，两个量的值都给定(初始条件是当 $t=0$ 时，$v=0$，$p=p_0$)，而在第二条曲线上，则给定其中一个量的值($v=u$，这里 $u(t)$ 为活塞的速度)．

等熵流动，其特征线方程就是 J_+ $=$ 常数，$J_-=$ 常数，方程右边的常数可以取各种的值；我们把这些特征线记作Γ_+和Γ_-. 若是完全气体，根据式(97.3)，这些特征线是两族平行直线(图 74)．

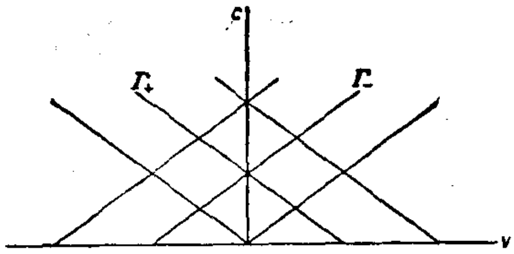


图 74

应该指出：这些特征线完全由气体的性质所决定，而丝毫不依赖于运动方程组的特解．这是由于以 v, c 为自变量的等熵流动的方程(我们将在 §98 中看到)是一个线性的二阶偏微分方程，其系数只依赖于自变量．

xt 平面上的特征线和 vc 平面上的特征线之间，存在着与运动方程组特解有关的相互转换关系．但是，该转换不必是一一对应的．特别是，对应于一个给定的简单波，在 vc 平面上只有一条特征线，即 xt 平面上简单波的所有特征线都转换成这一条特征线．(例如)对于向右传播的行波，它是 Γ_- 的一条特征线；所有特征线 C_-都转换成这条 Γ_-的特征线，而特征线 C_+ 则转换成这条 Γ_- 的特征线上不同的点．

问　题

设理想气体的 $\gamma=3$，试求其一维等熵流动方程组的通解．

解：当 $\gamma=3$ 时，有

$$J_\pm=v\pm c;$$

因此方程组(97.4)有通解：

$$x=(v+c)t+f_1(v+c),$$
$$x=(v-c)t+f_2(v-c),$$

其中 f_1 和 f_2 是任意函数．这两个方程以隐函数的形式确定所求解的函数 $v(x,t)$ 和 $c(x,t)$，以及其余所有的量．在这种情形下，可以说 $v\pm c$ 这两个量是作为互不干扰的两个简单波独立地传播的．

§ 98. 任意的一维气体流动

现在来研究任意的一维等熵气体流动（没有激波）的一般问题. 我们首先指出，这个问题可以归结为解线性微分方程的问题.

任何一维流动(即流动只依赖于一个空间坐标)一定是一个势流，因为任何函数 $v(x,t)$ 都能写成导数的形式:

$$v(x,t)=\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}.$$

因此，我们可以利用作为欧拉方程一次积分的伯努利方程 (9.3): $\partial\phi/\partial t+\frac{1}{2}v^2+w=0$. 由此，求得微分

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial t}dt$$

$$=vdx-\left(\frac{1}{2}v^2+w\right)dt.$$

这里的自变量为 x 和 t; 现在要将自变量改变成 v 和 w. 为此，利用勒让德变换，令

$$d\phi=d(xv)-xdv-d\left[t\left(w+\frac{1}{2}v^2\right)\right]+td\left(w+\frac{1}{2}v^2\right),$$

同时将 ϕ 换成一个新的辅助函数:

$$\chi=\phi-xv+t\left(w+\frac{1}{2}v^2\right),$$

则得

$$d\chi=-xdv+td\left(w+\frac{1}{2}v^2\right)=tdw+(vt-x)dv,$$

这里把 χ 看成是 v 和 w 的函数. 把这个关系式与等式

$$d\chi=\frac{\partial\chi}{\partial w}dw+\frac{\partial\chi}{\partial v}dv$$

作比较，则有 $t=\partial\chi/\partial w, vt-x=\partial\chi/\partial v$, 或

$$t=\partial\chi/\partial w, x=v\partial\chi/\partial w-\partial\chi/\partial v. \tag{98.1}$$

如果函数 $\chi(v,w)$ 已知，则这些公式就可确定 v 和 w 作为坐标 x 和时间 t 的函数.

现在来导出关于 χ 的方程. 为此，从至今尚未利用的连续方程出发，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)\equiv\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

我们将这个方程变换成用变量 v,w 表示. 将偏导数写成雅可比行列式的形式，则有

$$\frac{\partial(\rho,x)}{\partial(t,x)}+v\frac{\partial(t,\rho)}{\partial(t,x)}+\rho\frac{\partial(t,v)}{\partial(t,x)}=0,$$

或者，再乘以 $\partial(t,x)/\partial(w,v)$，即得

$$\frac{\partial(\rho,x)}{\partial(w,v)}+v\frac{\partial(t,\rho)}{\partial(w,v)}+\rho\frac{\partial(t,v)}{\partial(w,v)}=0.$$

为了展开这些雅可比行列式，我们必须利用下述结果. 根据气体的状态方程，ρ 是任何两个独立的热力学量的函数；例如，我们可以把 ρ 看成是 w 和 s 的函数. 如果 $s=$ 常数，就有 $\rho=\rho(w)$，则密度不依赖于 v. 所以，展开雅可比行列式后得

$$\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial x}{\partial v}-v\frac{d\rho}{dw}\frac{\partial t}{\partial v}+\rho\frac{\partial t}{\partial w}=0.$$

将关于 t 和 x 的表达式(98.1)代入上式，得

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dw}\left(\frac{\partial\chi}{\partial w}-\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2}=0.$$

在 $s=$ 常数的条件下，还有 $dw=dp/\rho$，因此 $\frac{dw}{dp}=\frac{1}{\rho}$.

于是可写出 $\frac{d\rho}{dw}=\frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{dw}=\frac{\rho}{c^2}$. 最后，得出 χ 的方程为

$$c^2\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}+\frac{\partial\chi}{\partial w}=0; \tag{98.2}$$

这里声速 c 看成是 w 的函数. 这样，非线性运动方程组的积分问题

就化成求解线性方程的问题.

现在把这个结果用到理想气体的情形上去.因为$c^2=(\gamma-1)w$,所以基本方程(98.2)变为

$$(\gamma-1)w\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}+\frac{\partial\chi}{\partial w}=0. \tag{98.3}$$

如果$(3-\gamma)/(\gamma-1)$是偶数,即

$$(3-\gamma)/(\gamma-1)=2n \text{ 或 } \gamma=(3+2n)/(2n+1),\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{98.4}$$

则对方程(98.3)进行初等运算就能得出通积分.单原子气体($\gamma=5/3, n=1$)和双原子气体($\gamma=7/5, n=2$)都满足这个条件.用n来表示γ,可将方程(98.3)改写为

$$\frac{2}{2n+1}w\frac{\partial^2\chi}{\partial w^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}+\frac{\partial\chi}{\partial w}=0. \tag{98.5}$$

n给定时,我们将满足方程(98.5)的函数记为χ_n.于是,对于函数χ_0,有

$$2w\frac{\partial^2\chi_0}{\partial w^2}-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial v^2}+\frac{\partial\chi_0}{\partial w}=0.$$

引用代替w的变量$u=\sqrt{2w}$,便得

$$\frac{\partial^2\chi_0}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\chi_0}{\partial v^2}=0.$$

这恰是通常的波动方程,其通解为

$$\chi_0=f_1(u+v)+f_2(u-v),$$

其中f_1和f_2为任意函数.因此

$$\chi_0=f_1(\sqrt{2w}+v)+f_2(\sqrt{2w}-v). \tag{98.6}$$

现在来证明,如果函数χ_n已知,则函数χ_{n+1}可以通过求微分而得到.因为将方程(98.5)对w求微分,很容易求得

$$\frac{2}{2n+1}w\frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)+\frac{2n+3}{2n+1}\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)-\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)=0.$$

令

$$v=v'\sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}}$$

则得 $\partial\chi_n/\partial w$ 的方程为

$$\frac{2}{2n+3}w\frac{\partial^2}{\partial w^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)-\frac{\partial^2}{\partial v'^2}\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial w}\right)=0,$$

这就是关于函数 $\chi_{n+1}(w,v')$ 的方程(98.5)．因此得出

$$\chi_{n+1}(w,v')=\frac{\partial}{\partial w}\chi_n(w,v)$$

$$=\frac{\partial}{\partial w}\chi_n\left(w,v'\sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}}\right). \tag{98.7}$$

将这个公式利用 n 次，同时取式(98.6) 的 χ_0，就可以求得方程(98.5)的通解为

$$\chi=\frac{\partial^n}{\partial w^n}\{f_1[\sqrt{2(2n+1)w}+v]+f_2[\sqrt{2(2n+1)w}-v]\},$$

或 (98.8)

$$\chi=\frac{\partial^{n-1}}{\partial w^{n-1}}\left\{\frac{F_1[\sqrt{2(2n+1)w}+v]+F_2[\sqrt{2(2n+1)w}-v]}{\sqrt{w}}\right\}$$

其中，F_1 和 F_2 仍然是两个任意的函数.

如果按公式 $w=c^2/(\gamma-1)=\frac{1}{2}(2n+1)c^2$，用声速代换上式中的 w，则解式(98.8)变为

$$\chi=\left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}F_1\left(c+\frac{v}{2n+1}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{c}F_2\left(c-\frac{v}{2n+1}\right)\right\}. \tag{98.9}$$

任意函数的自变量的表达式为

$$c\pm\frac{v}{2n+1}=c\pm\frac{1}{2}(\gamma-1)v,$$

这就是黎曼不变式(97.3)，它沿着特征线是不变的.

在实际应用中，常常需要计算特征线上的函数值 $\chi(v,c)$. 为此目的，下述公式是很有用的①：

$$\left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}F\left(c\pm\frac{v}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial c}\right)^{n-1}\frac{F(2c+a)}{c^{n}}, \qquad (98.10)$$

其中，$\pm v/(2n+1)=c+a$，(a 是任意常数).

现在来说明刚才所求得的通解与描写简单波的气体动力学方程组的解之间的关系. 后者最显著的性质在于 v 是 w 的确定函数：$v=v(w)$，所以雅可比行列式 $\Delta=\partial(v,w)/\partial(x,t)$ 恒等于零. 但是，在变换到变量 v 和 w 时，我们用雅可比行列式去除运动方程，所以，“丢掉了”$\Delta\equiv 0$ 的解. 因此，简单波不能直接从该运动方程的通解得到，而是这些方程的一个特殊积分.

为了弄清楚这个特殊积分的性质，我们必须考察这样的事实，即借助于特定的极限过程，可以从通积分得到这个特殊积分，而这一极限过程是与特征线作为小扰动传播路径的物理意义密切相关的. 设想 vw 平面上函数 $\chi(v,w)$ 不为零的区域变成沿一特征线的很狭的长带. 因为 χ 在横穿该特征线的方向上减小得非常快，

---

① 最简单的推导方法是应用复变函数论中的柯西定理. 对于一个任意函数 $F(c+u)$，我们有

$$\left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^{n-1}\frac{F(c+u)}{c}=2^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial c^{2}}\right)^{n-1}\frac{F(c+u)}{c}$$
$$=2^{n-1}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint\frac{F(\sqrt{z}+u)}{\sqrt{z}\,(z-c^{2})^{n}}dz,$$

这里积分所沿的曲线是复平面 z 上包含点 $z=c^2$ 的周线. 现在令 $u=c+a$，并以 $\sqrt{z}=2\zeta-c$，代入积分中，则得

$$\frac{1}{2^{n-1}}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint\frac{F(2\zeta+a)}{\zeta^{n}(\zeta-c)^{n}}d\zeta,$$

其中积分周线包含点 $\zeta=c$，再应用一次柯西定理，即得式(98.10).

所以χ在这个方向上的导数有很大的取值范围. 运动方程一定存在这样的解$\chi(v,w)$. 这是因为作为vw平面上的扰动，该解满足几何声学的条件，所以这类扰动沿特征线一定不为零.

由此显见，对于这样的函数χ，时间$t=\partial\chi/\partial w$将有任意大的取值范围. 但是，沿特征线的$\chi$的导数是有限的. 沿某一特征线(例如特征线$\Gamma_-$)，我们有

$$\frac{dJ_-}{dv}=1-\frac{1}{\rho c}\frac{dp}{dw}\frac{dw}{dv}=1-\frac{1}{c}\frac{dw}{dv}=0.$$

设沿特征线上，χ对v的导数记作$-f(v)$，于是

$$\frac{d\chi}{dv}=\frac{\partial\chi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial\chi}{\partial v}+c\frac{\partial\chi}{\partial w}=-f(v).$$

根据式(98.1)，将χ的偏导数用x和t表示，则得到关系式$x=(v+c)t+f(v)$，即简单波中的方程(94.5). 因为J_-沿特征线Γ_-不变，所以，给出简单波中v和c之间的关系的表达式(94.4)也必然满足.

在§97中已经证明：如果运动方程的解在xt平面的某个部分退化为均匀流动，那么在邻接于它的区域内一定有简单波. 因此，由通解(98.8)所描写的运动，一定由简单波将它与均匀流动区域(特别是气体静止的区域)分开. 像任何两个不同的解析解之间的分界线一样，简单波和通解(98.8)之间的分界线也是一条特征线. 在求解具体问题时，必须确定边界特征线上函数$\chi(w,v)$的值.

将x和t的表达式(98.1)代入简单波方程$x=(v\pm c)t+f(v)$，就得到简单波和通解之间分界面上的“连接”条件，即

$$\frac{\partial\chi}{\partial v}\pm c\frac{\partial\chi}{\partial w}+f(v)=0.$$

此外，在简单波中(以及其分界面的特征线上)，有$dv=\pm dp/\rho c=\pm dw/c$，或$\pm c=dw/dv$. 将它代入上述条件，得

$$\frac{\partial\chi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial w}\frac{dw}{dv}+f(v)=\frac{d\chi}{dv}+f(v)=0,$$

或最后得

$$\chi=-\int f(v)dv, \tag{98.11}$$

由此定出 χ 所需的边界值．特别是，如果简单波中心位于原点，即如果 $f(v)\equiv 0$，则 $\chi=$常数；因为函数 χ 只能确定到差一个附加的常数，所以我们可以在分界面的特征线上令 $\chi=0$，而不失一般性．

问　题

问题 1． 试确定一个有心稀疏波从固壁上反射时所引起的流动．

解： 设 $t=0$ 时在点 $x=0$ 处形成稀疏波，并沿 x 轴的正向传播；经过时间 $t=l/c_0$ 之后到达固壁，其中 l 是原点到固壁之间的距离．图 75 中画出了反射波的特征线．在 1 区和 1′ 区中，气体是静止的；在 3 区中，气体以等速度 $v=-U$ 运动①．2 区是入射稀疏波（具有直线特征线 C_+），5 区是反射波（具有直线特征线 C_-）．4 区是"相互作用区"，这是需要求解的区域；直线特征线进入这个区域时就开始变弯．这个解完全由线段 ab 和 ac 上的边界条件决定．在 ab 上（即固壁上），必须有

$$\text{当 } x=l \text{ 时，} v=0;$$

于是根据式(98.1)，就得出条件

$$\text{当 } v=0 \text{ 时，} \frac{\partial\chi}{\partial v}=-l.$$

由于稀疏波的边界 ac 是特征线 C_- 上的一段，因此有

$$c-\frac{1}{2}(\gamma-1)v=c-\frac{v}{2n+1}=\text{常数};$$

因为在点 a 上有 $v=0$ 和 $c=c_0$，所以常数等于 c_0．又因为在这一边界上 χ 必须为零，于是有条件

$$\text{当 } c-\frac{v}{2n+1}=c_0 \text{ 时，} \chi=0.$$

---

① 如果稀疏波是由活塞在管道内以等速度向外运动而产生的，则 U 就是活塞的速度．

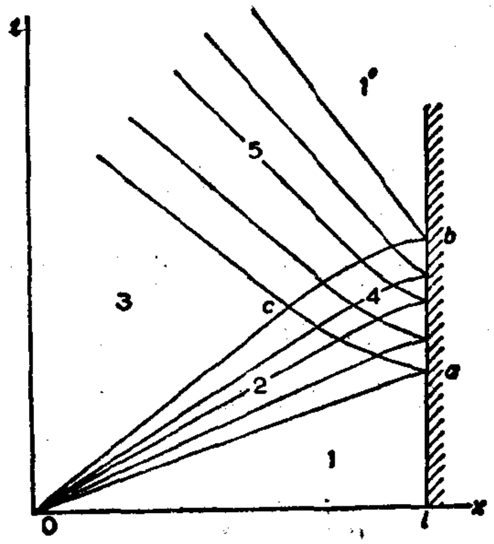


图 75

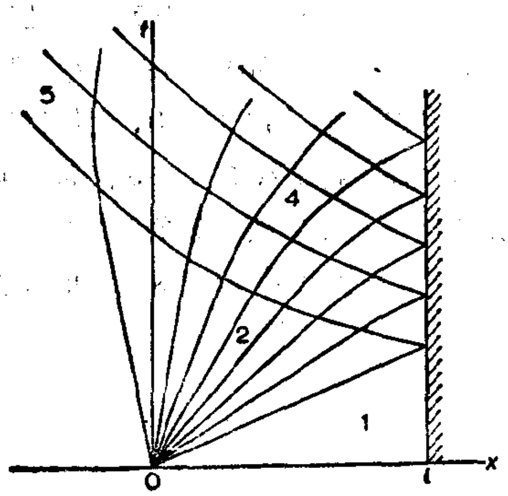


图 76

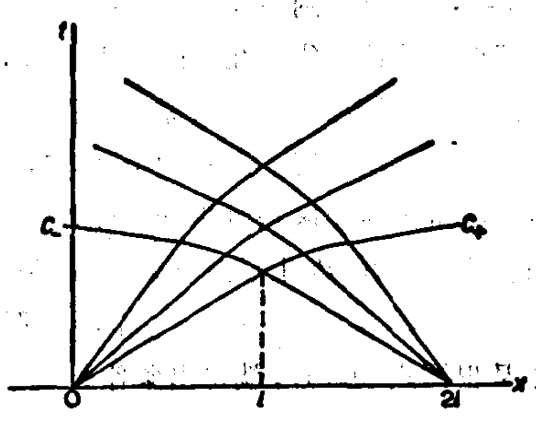


图 77

容易看出，满足这些条件并具有式(98.9)形式的函数为

$$\chi=\frac{l(2n+1)}{2^n n!}\left(\frac{\partial}{c\partial c}\right)^{n-1}\left\{\frac{1}{c}\left[\left(c-\frac{v}{2n+1}\right)^2-c_0^2\right]^n\right\}, \qquad (1)$$

这个式子给出了所求的解.

特征线 ac 的方程为(参看§96的问题)

$$x=-(2n+1)c_0t+(2n+1)l\left(\frac{tc_0}{l}\right)^{(2n+1)/2(n+1)}.$$

它与特征线 Oc

$$\frac{x}{t}=c_0-\frac{1}{2}(\gamma+1)U=c_0-2(n+1)U/(2n+1)$$

的交点确定出入射波消失的时间:

$$t_0=\frac{l(2n+1)^{n+1}c_0^n}{[(2n+1)c_0-U]^{n+1}}.$$

在图 75 中，我们假定 $U<2c_0/(\gamma+1)$；在相反的情形下，特征线 Oc 在 x 的负侧 (图 76). 于是，入射波和反射波的相互作用的时间将会无限制的延续下去(而不像图 75 中那样，相互作用的时间是有限的).

函数(1)还可以描述两个相同的有心稀疏波之间的相互作用，这两个稀疏波是在 $t=0$ 时分别从点 $x=0$ 和点 $x=l$ 发出的，并且彼此相向地传播；根据对称性，这是显然的(图 77).

问题 2. 试仿方程(98.3)，导出理想气体的一维等温流动的方程.

解. 在等温流动时，伯努利方程中的焓 w 应换成

$$\mu=\int\frac{dp}{\rho}=c_T^2\int\frac{d\rho}{\rho}=c_T^2\ln\rho,$$

其中，$c_T^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T$ 是等温声速的平方. 就理想气体来说，c_T=常数. 以量 μ (代替 w)为自变量，按照正文中同样的方法，得到下述常系数的线性方程:

$$c_T^2\frac{\partial^2\chi}{\partial\mu^2}+\frac{\partial\chi}{\partial\mu}-\frac{\partial^2\chi}{\partial v^2}=0.$$

§ 99. 强激波的传播

现在来研究由强爆炸产生的强度很大的球面激波的传播问题. 强爆炸是指在一个很小体积中瞬时释放出巨大能量(这个能量记作 E)的现象；并且假设强激波是在理想气体中传播的 (Л. И. 谢道夫，1946).

我们研究在离爆炸源比较近的距离上的这种激波，所以，其强度仍然很强. 不过我们假定这种距离比起爆炸源的尺度还是很大的；这就使得我们能够假定能量 E 是在一个点(原点) 上产生的.

如果激波很强，则激波上的压力间断是非常大的. 我们假设间断面后的压力 p_2 与间断面前未经扰动的气体的压力 p_1，之比

$\frac{p_2}{p_1}\gg\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$. 这就是说，与 p_2 相比时，p_1 总是可以忽略不计的，同时密度比 ρ_2/ρ_1 等于其极限值 $(\gamma+1)/(\gamma-1)$；参看 §85.

因此，气体流动的图象只取决于两个参数：初始气体密度 ρ_1 和爆炸中所产生的能量 E. 由这两个参数以及两个自变量(时间 t 和径向坐标 r)，我们只能构成一个无量纲量，它可写成

$$\xi=r(\rho_1/Et^2)^{1/5}. \tag{99.1}$$

于是，我们得到一种特定类型的自相似流动.

首先可以断言，在整个时间过程中，激波本身的位置应对应于无量纲量 ξ 的某个确定的值 ξ_0. 由此立即给出激波随时间运动的规律；用 r_0 表示激波离开原点的距离，则有

$$r_0=\xi_0(Et^2/\rho_1)^{1/5}. \tag{99.2}$$

由此，求得激波传播的速度(相对于未经扰动的气体，即相对于固定坐标系)为

$$u_1=dr_0/dt=2r_0/5t. \tag{99.3}$$

u_1 随 $t^{-3/5}$ 而减小.

借助于 §85 中所导出的公式，可以用 u_1 来表示气体刚刚越过间断面的压力 p_2，密度 ρ_2 和速度 $v_2=u_1-u_2$(相对于固定坐标系). 根据式(88.5)和(85.6)①，则有

$$\left.\begin{aligned}v_2&=2u_1/(\gamma+1),\\ \rho_2&=\rho_1(\gamma+1)/(\gamma-1),\\ p_2&=2\rho_1u_1^2/(\gamma+1).\end{aligned}\right\} \tag{99.4}$$

密度在时间过程中是不变的，而 v_2 和 p_2 分别随 $t^{-3/5}$ 和 $t^{-6/5}$ 而减小. 我们还可以指出：由激波产生的压力 p_2 随爆炸的总能量以 $E^{2/5}$ 的规律而增加.

其次，我们来确定激波后整个区域中的气体流动. 引用无量

① 这里，将公式(85.6)所给出的相对于气体的激波速度记作 u_1 和 u_2.

纲变量 v', ρ', p',以替代气体的速度 v,密度 ρ 和压力 p,则 v', ρ', p' 的定义为

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{4}{5(\gamma+1)} \frac{r}{t} v', \\ \rho &= \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho', \\ p &= \frac{8\rho_1}{25(\gamma+1)} \frac{r^2}{t^2} p'. \end{aligned}\right\} \tag{99.5}$$

量 v', ρ',和 p' 都只能是无量纲变量 ξ 的函数. 在间断面上(即在 $\xi=\xi_0$ 时),这三个量必取下述的值:

$$\text{当 } \xi=\xi_0 \text{ 时}, v'=p'=\rho'=1. \tag{99.6}$$

气体的中心对称绝热流动方程组为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial \chi}+\frac{2\rho v}{r}=0, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial r}\right)\ln\frac{p}{\rho^\gamma}=0. \end{aligned}\right\} \tag{99.7}$$

上述最后一个方程是熵守恒方程,其中已把理想气体的熵的表达式(80.12)代入. 将式(99.5)代入之后,即可得到关于函数 v', ρ' 和 p' 的常微分方程组. 由于利用下述讨论,我们立即可以得出一个积分,这就使得方程组的积分变得容易了.

我们已经略去未经扰动的气体压力 p_1,这意味着与气体从爆炸获得的能量 E 相比,我们略去了气体原有的能量. 由此显见,以激波为界的球内气体的总能量不变,并且就等于 E. 此外,因为是自相似流动,显然在任何具有较小的半径的球内,只要半径随时间的增加而使得 ξ 保持不变(ξ 可以是任何常数,而不仅仅是 ξ_0),则球内气体的能量就一定保持不变;在这种球面上任一点的径向速度为 $v_n=2r/5t$(参看(99.3)).

不难写出表示这种能量不变性的方程.一方面,在时间dt内流出球面(球面面积为$4\pi r^2$)的能量为$dt\cdot 4\pi r^2\rho v(w+\frac{1}{2}v^2)$. 另一方面,在这时间内,球体积增加了$dt\cdot v_n\cdot 4\pi r^2$, 这一额外体积内的气体能量为$dt\cdot 4\pi r^2\rho v_n\left(\epsilon+\frac{v^2}{2}\right)$. 令这两个表达式相等, 将$\epsilon=\frac{p}{\rho(\gamma-1)}$ 和 $w=\gamma\epsilon$代入, 并且按式(99.5)引入无量纲函数, 则得

$$\frac{p'}{\rho'}=\frac{(\gamma+1-2v')v'^2}{2\gamma v'-\gamma-1}, \tag{99.8}$$

这就是所求的积分. 它在间断面上自动地满足边界条件(99.6).

当积分(99.8)已知时,方程组的积分虽然麻烦, 但不过是初等的运算而已. 方程(99.7)中的第二个和第三个方程给出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dv'}{d\ln\xi}+\left(v'-\frac{\gamma+1}{2}\right)\frac{d\ln\rho'}{d\ln\xi}=-3v',\\&\frac{d}{d\ln\xi}\left(\ln\frac{p'}{\rho'^{\gamma}}\right)=\frac{5(\gamma+1)-4v'}{2v'-(\gamma+1)}.\end{aligned}\right\} \tag{99.9}$$

从这两个方程出发, 借助于式(99.8), 我们可以把导数$\frac{dv'}{d\ln\xi}$和$\frac{d\ln\rho'}{dv'}$表示成只是v'的函数,于是,满足边界条件(99.6)的积分为

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^5=v'^2\left[\frac{5(\gamma+1)-2(3\gamma-1)v'}{7-\gamma}\right]^{\nu_1}\left[\frac{2\gamma v'-\gamma-1}{\gamma-1}\right]^{\nu_2},\\&\rho'=\left[\frac{2\gamma v'-\gamma-1}{\gamma-1}\right]^{\nu_3}\left[\frac{5(\gamma+1)-2(3\gamma-1)v'}{7-\gamma}\right]^{\nu_4}\left[\frac{\gamma+1-2v'}{\gamma-1}\right]^{\nu_5},\\&\nu_1=\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(3\gamma-1)(2\gamma+1)},\qquad \nu_2=-\frac{5(\gamma-1)}{2\gamma+1},\\&\nu_3=\frac{3}{2\gamma+1},\qquad \nu_4=\frac{13\gamma^2-7\gamma+12}{(2-\gamma)(3\gamma-1)(2\gamma+1)},\\&\nu_5=\frac{1}{\gamma-2}.\end{aligned}\right\} \tag{99.10}$$

公式(99.8)和(99.10)给出了问题的完全解. 常数 ξ_0 由条件

$$E=\int_0^{r_0}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\frac{p}{\gamma-1}\right)4\pi r^2 dr,$$

确定，上式表示气体的总能量等于爆炸的能量 E. 用无量纲量表示，这个条件变为

$$\xi_0^5\frac{32\pi}{25(\gamma^2-1)}\int_0^1\left[\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^4\rho' v'^2+\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^4 p'\right]d\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)$$

$$=1. \qquad (99.11)^*$$

例如，对于空气$\left(\gamma=\frac{7}{5}\right)$而言，这个常数 $\xi_0=1.033$.

从上述公式容易看出，作为 $r/r_0=\xi/\xi_0$ 的函数的比值 v/v_2 和 ρ/ρ_2，它们将随 $r/r_0\to 0$ 而按以下规律趋向于零:

$$v/v_2\sim r/r_0,\ \rho/\rho_2\sim(r/r_0)^{3/(\gamma-1)}; \qquad (99.12)$$

但是，压力比 p/p_2 趋向于一个常数，所以温度比趋向无穷大.

图 78是就空气 ($\gamma=1.4$) 的情形画出了量 v/v_2, p/p_2 和ρ/ρ_2

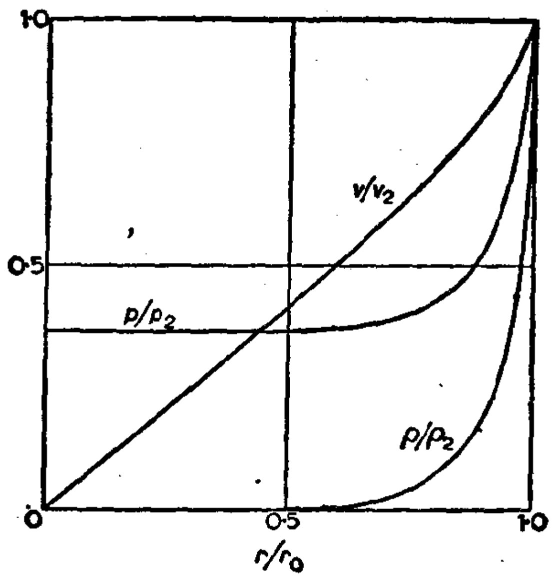


图 78

---

* 原式误为 $\xi_0^5\frac{32\pi}{25(\gamma^2-1)}\int_0^1(\xi^4\rho' v'^2+\xi^2 p')d\xi=1$. ——中译者注

作为 r/r_0 的函数的变化曲线. 值得注意的是密度在向球心方向上非常迅速地减小, 即几乎全部气体集中在激波厂面相当薄的薄层中. 当然, 这是由于在具有最大半径(r_0)的球面上, 气体密度已是正常密度的六倍了①.

§ 100. 浅水理论

当不可压缩流体的深度很小时 (相对于问题中的特征尺度而言, 例如容器底部起伏的尺度), 气体流动与重力场中不可压缩流体具有自由面的流动之间, 有着显著的类似关系. 在这种情形下, 流体速度垂直于表面的分量与其平行于表面的分量相比, 可以略去不计, 而后者又可以认为在流体的整个深度上是不变的. 在这样的(水力学的)近似下, 流体可以看成是"二维的"介质: 在每个点上都有确定的速度 $\boldsymbol{v}$, 同时在每个点上还由一个代表流体深度的量 h 所表征.

相应的一般运动方程组与 § 13 中所得到的运动方程组的差别仅仅在于: 现在不必像 § 13 中讨论小波幅的长重力波那样, 需要假设运动过程中各个量的改变量都是小量. 所以, 欧拉方程中速度的二阶项必须保留. 特别是对于只依赖于一个坐标 x(以及时间 t)的渠道中的一维流动而言, 其方程组为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial(vh)}{\partial x}&=0,\\ \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}&=-g\frac{\partial h}{\partial x};\end{aligned}\right\}\qquad(100.1)$$

这里假设深度 h 沿渠道横向是不变的.

从广义来说, 长重力波是现在所讨论的流动的小扰动情形.

---

① 关于 γ 为别的值时, 谢道夫已给出计算结果. 见 L. I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, 第四章, § 11 (已有中译本, 科学出版社), Cleaver-Hume Press, London 1959. 书中还讨论了相应的柱形对称的问题.

§ 13 的结论表明：这种小扰动以有限的速度相对于流体进行传播，其传播速度为

$$c=\sqrt{gh}. \tag{100.2}$$

这里，这个传播速度与声速在气体动力学中的作用相同. 正如 §79 那样，可以断言：如果流体以速度 $v<c$ 运动(**缓流**)，则扰动的影响向上游和下游两个方向传播. 但是，如果流体以速度 $v>c$ 运动(**急流**)，则扰动的影响只传播到下游的某个区域内.

压力 p(从自由面上的大气压力算起) 按照流体静力学定律 $p=\rho g(h-z)$，随流体的深度而变化，其中 z 是距离底部的高度. 指出下面这一点是有用的，即如果引用以下两个量：

$$\bar{\rho}=\rho h, \qquad \bar{p}=\int_0^h p\,dz=\frac{1}{2}\rho g h^2=g\bar{\rho}^2/2\rho, \tag{100.3}$$

则方程组(100.1)变成

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial(v\bar{\rho})}{\partial x}=0, \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{100.4}$$

在形式上，上述方程组与 $\gamma=2$ 的理想气体($\bar{p}\sim\bar{\rho}^2$)的绝热流动方程组相同. 这就使我们能够将流动中不出现激波的气体动力学的所有结论直接应用于浅水理论. 但是，如果出现激波，则浅水理论的结果与理想气体动力学的结果不同.

渠道中流体的"激波"是流体高度 h 的间断，以及与之相关的流体速度 v 的间断(即所谓**水跃**). 间断两侧这些量之间数值上的关系，可由质量通量和动量通量的连续性条件得出. 质量通量密度(渠道每单位宽度上的质量通量)为 $j=\rho v h$. 把 $p+\rho v^2$ 沿渠道深度进行积分，即得动量通量密度为

$$\int_0^h (p+\rho v^2)\,dz=\frac{1}{2}\rho g h^2+\rho v^2 h.$$

于是连续性条件给出两个方程：

$$v_1 h_1=v_2 h_2, \tag{100.5}$$

$$v_1^2h_1+\frac{1}{2}gh_1^2=v_2^2h_2+\frac{1}{2}gh_2^2. \tag{100.6}$$

这两个方程给出四个量 v_1, v_2, h_1, h_2 之间的关系，其中有两个量是任意给定的．将速度 v_1 和 v_2 用高度 h_1 和 h_2 表示，则得

$$\left.\begin{aligned} v_1^2&=\frac{1}{2}gh_2(h_1+h_2)/h_1,\\ v_2^2&=\frac{1}{2}gh_1(h_1+h_2)/h_2. \end{aligned}\right\} \tag{100.7}$$

间断两侧的能量通量并不相同，其间的差值是在间断中每单位时间所耗散的能量．渠道中的能量通量密度为

$$q=\int_0^h\left(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2\right)\rho v dz=\frac{1}{2}j(gh+v^2).$$

利用式(100.7)，求得这个差值为

$$q_1-q_2=gj(h_1^2+h_2^2)(h_2-h_1)/4h_1h_2.$$

设流体从 1 侧穿过间断面进入 2 侧．因为能量耗散意味着 $q_1-q_2>0$，所以我们可以得到

$$h_2>h_1, \tag{100.8}$$

即流体从较低的高度运动到更高的高度．因此，可以从式(100.7)推出

$$v_1>c_1=\sqrt{gh_1},\quad v_2<c_2=\sqrt{gh_2}. \tag{100.9}$$

这完全类似于气体动力学中激波的结果．和§84 中一样，还可以从间断面稳定性的必要条件推出不等式(100.9)．

第十一章 间断面的相交

§ 101. 稀疏波

在数学上，两个激波的交线就是描写气体流动的两个函数的奇线．当气体流过一个物体时，物面上任一尖角的棱总是这样一条奇线．据发现，这种奇线附近的气体流动可以用最一般的方法来研究(L. 普朗特和 T. 迈耶, 1908)．

在研究奇线上一小段附近的区域时，可以把这一小段奇线当作直线，并且取为柱坐标系 r, ϕ, z 中的 z 轴．在这一小段奇线附近，所有的量主要依赖于角 ϕ，而与坐标 r 的关系不大，当 r 足够小时，这种对 r 的依赖关系就可以忽略不计．同样地，对于坐标 z 的依赖关系也是不重要的，即流动图象沿这一小段奇线的改变可以忽略不计．

于是，所有我们须研究的量只是 ϕ 的函数的定常流动．这时，熵守恒方程为 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla s=0$，从而给出 $v_\phi ds/d\phi=0$，由此可知 $s=$ 常数①，即流动是等熵的．于是，在欧拉方程中可以用 ∇w 代替 $\frac{1}{\rho}\nabla p$，得 $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla w$．在柱坐标系中，我们有三个方程：

$$\frac{v_\phi}{r}\frac{dv_r}{d\phi}-\frac{v_\phi^2}{r}=0,$$

$$\frac{v_\phi}{r}\frac{dv_\phi}{d\phi}+\frac{v_r v_\phi}{r}=-\frac{1}{r}\frac{dw}{d\phi},$$

① 如果 $v_\phi=0$，则从下面给出的运动方程不难得出 $v_r=0, v_z\neq0$．这样的流动将对应于切向间断面(具有间断速度 v_z)的相交，因为这种间断是不稳定的，所以不予考虑．

$$v_\phi \frac{dv_z}{d\phi}=0.$$

由最后一个方程，立即得出 v_z = 常数，所以可令 $v_z=0$，而不失一般性，从而可以把流动看成是二维的. 这只需合适地选取坐标系沿 z 轴方向的速度就可以了. 前面两个方程可写为

$$v_\phi=\frac{dv_r}{d\phi}, \tag{101.1}$$

$$v_\phi\left(\frac{dv_\phi}{d\phi}+v_r\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\phi}=-\frac{dw}{d\phi}. \tag{101.2}$$

将方程(101.1)代入方程(101.2)，得

$$v_\phi\frac{dv_\phi}{d\phi}+v_r\frac{dv_r}{d\phi}=-\frac{dw}{d\phi},$$

或者，积分后，得

$$w+\frac{1}{2}(v_\phi^2+v_r^2)=\text{常数}. \tag{101.3}$$

应该指出，方程(101.1)意味着 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$，即所讨论的流动是势流，因此伯努利方程(101.3)成立.

其次，连续方程 $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$ 给出

$$\rho v_r+\frac{d}{d\phi}(\rho v_\phi)=\rho\left(v_r+\frac{dv_\phi}{d\phi}\right)+v_\phi\frac{d\rho}{d\phi}=0. \tag{101.4}$$

利用式(101.2)，可得

$$\left(\frac{dv_\phi}{d\phi}+v_r\right)\left(1-v_\phi^2\frac{d\rho}{dp}\right)=0.$$

导数 $dp/d\rho$，或者更确切地说 $(dp/d\rho)_s$，恰好是声速的平方. 因此

$$\left(\frac{dv_\phi}{d\phi}+v_r\right)\left(1-\frac{v_\phi^2}{c^2}\right)=0. \tag{101.5}$$

下述两种情形都可以满足这个方程. 第一种情形是 $dv_\phi/d\phi+v_r=0$. 于是，根据方程(101.2)，得 p = 常数，ρ = 常数，同时根据式(101.3)，可求得 $v^2=v_r^2+v_\phi^2$ = 常数，即速度的大小为常量. 很

容易看出，在这种情形下，速度的方向也不变．速度与运动平面中某个给定方向之间的夹角 χ（图79）为

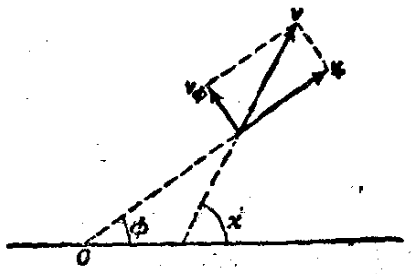


图 79

$$\chi=\phi+\operatorname{arc\,tg}\frac{v_\phi}{v_r}. \qquad (101.6)$$

将该式对ϕ求导，并利用公式(101.1)和(101.2)容易得到

$$\frac{d\chi}{d\phi}=-(v_r/\rho v_\phi v^2)\frac{dp}{d\phi}. \qquad (101.7)$$

既然 p = 常数，所以得出 χ = 常数．因此，如果方程(101.5)中的第一个因子为零，则得到均匀流的平凡解．

第二种情形，可令 $1-v_\phi^2/c^2=0$，即 $v_\phi=\pm c$ 来满足方程(101.5)．径向速度则由式(101.3)给出．如用 w_0 来表示该方程中的常数，则得

$$v_\phi=\pm c,\ v_r=\pm\sqrt{[2(w_0-w)-c^2]}.$$

在这个解中，每一点上垂直于径向矢量的速度分量 v_ϕ 都等于当地声速．所以合速度 $v=\sqrt{v_\phi^2+v_r^2}$ 大于当地声速．速度的大小和方向，在不同的点上均不相同．因为声速不能等于零，显然连续函数 $v_\phi(\phi)$ 一定是要么处处为 $+c$，要么处处为 $-c$．通过以合适的方向为标准来量度角 ϕ，我们总可以取 $v_\phi=c$．下面将看到，v_r 符号的选取，从物理上考虑，必须取成正号．因此，

$$v_\phi=c,\ v_r=\sqrt{[2(w_0-w)-c^2]}. \qquad (101.8)$$

根据连续方程(101.4)，我们有 $d\phi=-d(\rho v_\phi)/\rho v_r$．将式(101.8)代入并积分之，得

$$\phi=-\int\frac{d(\rho c)}{\rho\sqrt{[2(w_0-w)-c^2]}}. \qquad (101.9)$$

如果知道了气体的状态方程和绝热方程(记住：s = 常数)，则公式(101.9)可以用来定出所有的量对角 ϕ 的函数关系．所以，式

(101.8)和(101.9)完全确定了气体的流动.

现在来更加详细地研究所得到的解. 首先指出, 直线 ϕ=常数在其所有的点上均与流线交成马赫角 (马赫角的正弦为 $v_\phi/v=c/v$),即这些直线都是特征线. 因此, 在 xy 平面上有一族特征线是通过奇点的直线束,并且在所讨论的情形下,这族特征线有如下重要的性质: 沿该族每一条特征线上所有的量都是常量. 就这方面来说, 这里的解在二维定常流动理论中所起的作用, 与 § 92 所讨论的自相似流动在一维不定常流动理论中的作用相同. 我们将在 § 107 中重新讨论这个问题.

由式(101.9)可知,$(\rho c)'<0$, 这里一撇表示对 ϕ 的导数. 写出 $(\rho c)'=\rho' d(\rho c)/d\rho$, 并注意到导数 $d(\rho c)/d\rho$ 是正的 (参看(92.9)), 则得出 $\rho'<0$, 所以导数 $p'=c^2\rho'$ 和 $w'=p'/\rho$ 也是负的. 其次,根据 w' 是负的, 得出速度 $v=\sqrt{2(w_0-w)}$ 随 ϕ 的增加而增加. 最后,从式(101.7)得 $\chi'>0$. 因而有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp}{d\phi}<0, \qquad \frac{d\rho}{d\phi}<0,\\ &\frac{dv}{d\phi}>0, \qquad \frac{d\chi}{d\phi}>0. \end{aligned}\right\} \tag{101.10}$$

换句话说, 当沿着流动方向绕过奇点时, 密度和压力总是减小的, 而速度的大小总是增加的,速度的方向沿流动方向偏转.

刚才所描述的流动通常称为**稀疏波**, 以后, 我们将采用这个名词.

容易看出, 稀疏波不可能在整个奇点邻域内存在. 原因在于 v 是随 ϕ 的增加而单调增加的,所以在绕原点一周(即 ϕ 改变 2π)后的点上,v 值将与原来的值不同,这是不可能的. 因为这样, 奇线附近的实际流动图象一定是由一系列的扇形区域组成, 这些扇形区域是由间断面 (ϕ=常数的平面) 划分而成的. 在每一个扇形区域中,或是稀疏波,或是等速度的均匀流动. 在各种具体情形下

的扇形区域的数目和性质，将在以下几节中讨论. 我们在这里仅指出，稀疏波和均匀流之间的边界必然是一个弱间断面：它不可能是(v_r 的)切向间断面，因为在这个边界上的法向速度分量 $v_\phi=c$，而不为零. 这个边界也不可能是激波，因为法向速度分量 v_ϕ 在激波这种间断面的一侧必大于声速，而另一侧必小于声速，然而在我们的问题中，在边界面的一侧总有 $v_\phi=c$.

由上面的讨论可以得出一个重要的结论. 引起弱间断的扰动显然是由奇线(z 轴) 出发向外传播的. 这就是说，包围稀疏波的弱间断面一定是由奇线出发的弱间断面，即速度在弱间断面上的切向分量 v_r 必须是正的. 这证明了式 (101.8) 中对 v_r 的符号所作的选择是正确的.

现在将这些公式应用于理想气体. 在理想气体的情形下. $w=c^2/(\gamma-1)$，而泊松绝热方程可以改写成

$$\rho c^{-2/(\gamma-1)}=\text{常数}, p c^{-2\gamma/(\gamma-1)}=\text{常数}; \qquad (101.11)$$

参看式(92.13). 利用这些公式，可以将积分(101.9)写成如下形式：

$$\phi=-\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\int\frac{dc}{\sqrt{(c_*^2-c^2)}},$$

其中 c_* 是临界速度[参看式(80.14)]. 由此

$$\phi=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c}{c_*}+\text{常数},$$

或者适当地选取 ϕ 的起点，使该积分常数为零，则

$$v_\phi=c=c_*\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi. \qquad (101.12)$$

根据公式(101.8)，于是有

$$v_r=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}c_*\sin\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi. \qquad (101.13)$$

然后，再利用式(101.11)形式的泊松绝热方程，可以求得压力对角 ϕ 的函数关系：

$$p=p_*\left(\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \tag{101.14}$$

最后，得出式(101.6)中的角χ：

$$\chi=\phi+\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right), \tag{101.15}$$

角χ和ϕ是从同一条起始直线量起的.

因为必须有$v_r>0$, $c>0$，所以，这些公式中的角ϕ只能在0和ϕ_{max}之间变化，其中

$$\phi_{max}=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}. \tag{101.16}$$

这意味着稀疏波可以充满一个角度不大于ϕ_{max}的扇形区域；在双原子气体(例如空气)的情形，这个角度等于219.3°. 当ϕ从0变到ϕ_{max}时，角χ则从$\frac{1}{2}\pi$变到ϕ_{max}. 因此稀疏波中的速度方向能够转过的角度不大于$\phi_{max}-\frac{1}{2}\pi$(就空气而言，这个角度为129.3°).

当$\phi=\phi_{max}$时，压力为零. 换句话说，如果稀疏波扩展到最

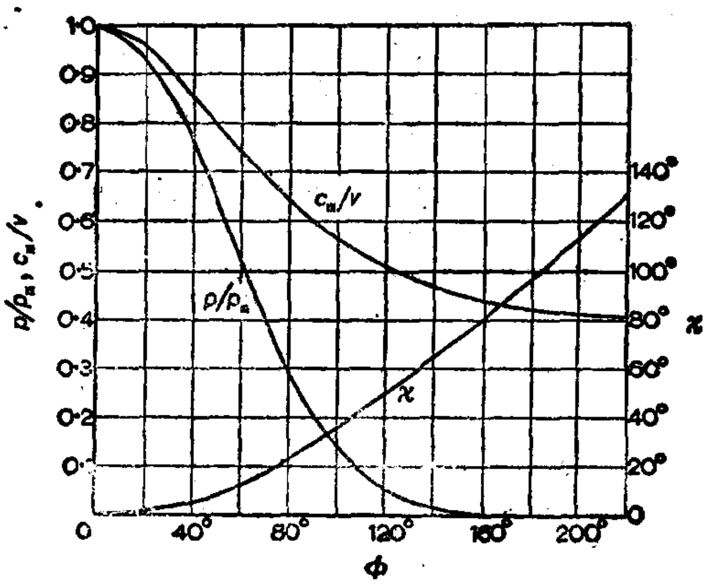


图 80

大角时，则其一侧的弱间断面是与真空的分界面，这当然是一条流线；这时有 $v_\phi=c=0, v_r=v=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}c_*=v_{\max}$，即速度沿着径向，并达到速度的极限值 $v_{\max}$(参看§80)．

对于空气($\gamma=1.4$)的情形，图 80 中给的是 p/p_*, c_*/v 和 χ 作为角 ϕ 的函数的曲线．

值得记住 v_xv_y 平面上由公式(101. 12)和 (101. 13) 定出的曲线形状(所谓**速度图**)．它是在半径分别为 $v=c_*$ 和 $v=c_*\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}=v_{\max}$ 这两个圆之间的外摆线的一段弧(图 81)．

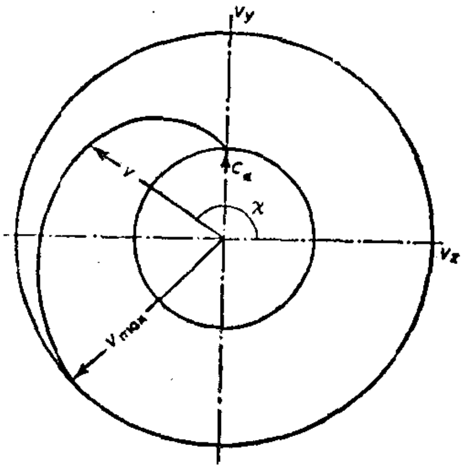


图 81

问　　题

问题 1. 试确定稀疏波中流线的形状．

解： 在极坐标中，二维流动的流线方程为

$$\frac{dr}{v_r}=\frac{r d\phi}{v_\phi}.$$

将公式(101. 12)和(101. 13)代入，积分后得

$$r=r_0\left(\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right)^{-(\gamma+1)/(\gamma-1)}.$$

这些流线构成一族相似的曲线，原点在曲线凹向的那一侧，而且是它的相似中心．

问题 2. 设有一稀疏波介于两弱间断面之间，如果在一个间断面上给定气体的速度 v_1 和声速 c_1 的值，试确定两个弱间断面之间的最大可能夹角．

解： 根据式(101. 12)，相应于第一个间断面的角 ϕ 为

$$\phi_1=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c_1}{c_*}.$$

ϕ_2 的值是 $\phi_{\max}$，所以需要求的夹角为

$$\phi_2-\phi_1=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arcsin\frac{c_1}{c_*}.$$

借助伯努利方程，可以求出以 v_1 和 c_1 表示的临界速度 c_*:

$$w_1+\frac{1}{2}v_1^2=\frac{c_1^2}{\gamma-1}+\frac{1}{2}v_1^2=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}c_*^2.$$

根据公式(101.15)，通过稀疏波的气体速度转向的最大可能折转角相应于差值 $\chi_{max}=\chi(\phi_1)-\chi(\phi_2)$:

$$\chi_{max}=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arcsin\frac{c_1}{c_*}-\arcsin\frac{c_1}{v_1}.$$

χ_{max} 是 v_1/c_1 的函数，当 $v_1/c_1=1$ 时，其值最大:

$$\chi_{max}=\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}-1\right).$$

当 $v_1/c_1\to\infty$ 时，χ_{max} 趋向于零:

$$\chi_{max}=\frac{2}{\gamma-1}\frac{c_1}{v_1}.$$

§ 102. 激波的相交

激波可以沿某曲线相交. 在研究这种交线上一小段附近的流动时，可以假定这一小段交线是直线，并假定激波间断面是平面. 因此，只须讨论平面激波的相交问题.

§ 101 中一开始就讲过，在数学上，两个间断面的交线是一条奇线. 交线附近的流动图象由许多个扇形区域所组成，在各个扇形区域中，或者是均匀流动，或者是 § 101 中所描述的那种稀疏波. 这就可以对间断面相交的所有可能类型进行一般性的分类(Л. Д. 朗道，1944).

首先，我们必须说明如下：如果激波两边的气流都是超声速的，则(如 § 86 一开始所指出的)可以谈论激波的"方向"，并由此把从交线出发的激波与到达交线的激波区分开来. 在前一种激波的情形下，切向的速度分量指向背离交线的方向，于是，我们可以说，使间断面形成的扰动是由这条交线发出的. 在后一种激波的

情形下，则扰动是从交线以外的点上发出的.

如果激波有一侧的扰动是亚声速的，则扰动沿其表面向两个方向传播出去，因而，严格地说，激波的"方向"就没有意义了. 但是对于以后的讨论来说，重要的是：由交线上的点发出的扰动可以沿这种间断面传播. 在这个意义上，这类激波在以后的讨论中起着与由交线发出的纯超声速流激波同样的作用，术语"由交线出发的激波"将包括这两种类型.

图 82 至 86 画出了在垂直于交线的平面内一些流动图象. 不失一般性，可以假设流动就发生在这个平面内. 在交线附近的整个区域内，平行于交线(它在所有的间断平面内)的速度分量必相同，因此，通过适当地选取坐标系，就可以使这个速度分量为零.

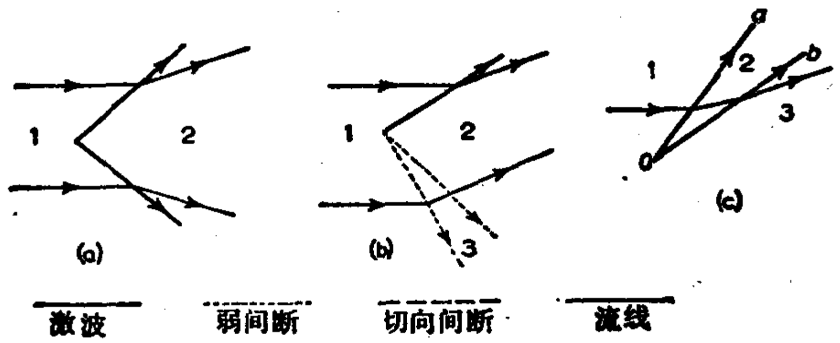


图 82

容易看出，没有到达交线的激波，不可能有激波的交线. 例如，在由交线出发的两个激波相交的情形下，如图 82a 所示，来自左面气流的流线，将沿相反的方向折转，而整个 2 区中的速度却是不变的，因此，在 2 区中再加上任何其它的间断，也无法解决这个矛盾①. 类似地还可以看出，如果激波和稀疏波均由交线发出，如图 82b 所示，两者就不可能相交；虽然 2 区中速度的方向可能不变，但是，由于在激波上的压力将增加，而在稀疏波中压力将减小，

① 为了避免繁琐重复的论证，对于存在着亚声速流动区域，而且由交线出发的激波实际上就是邻接于亚声速区域的激波的情形，我们不拟作类似的讨论.

所以压力不会不变.

其次,因为相交不会反过来影响来临的激波,所以,多于两个由其他原因引起的激波(沿一条公共的线)同时相交,是不大可能发生的巧合.因此只会有一个或两个激波到达交线.

下面的事实很重要.绕交点流动的气体只能通过一个由该点出发的激波或稀疏波.例如,设有气体通过由点O相继出发的两个激波,如图82c所示.因为在激波Oa后面的法向速度分量v_{2n}小于c_2,因而2区中垂直于激波Ob的速度分量也一定小于c_2,这与激波的基本性质矛盾.类似地,还可以知道,气体不可能通过从点O出发的两个相继的稀疏波,或者一个激波和一个稀疏波.

显然,这些讨论不能推广于到达交点的激波.

现在可以着手列举出所有可能的相交类型.图83画出了三个激波相交的情形,其中一个是到达交线的激波Oa,另两个是由交线出发的激波Ob,Oc.这种情形可以看成是一个激波分解为两个激波①.容易看出,除了两个由交线出发的激波之外,在这两激波之间,一定还形成一个切向间断面Od,以此将流过Ob的气体和流过Oc的气体隔开②.因为激波Oa是由别的原因引起的,所以是完全确定的.这意味着1区和2区中的热力学量(例如p和ρ)和速度v都已经给定了.因此,在我们所涉及的量中,只剩下了两个(表明间断面Ob和Oc方向的两个角度)待定,一般说来,在

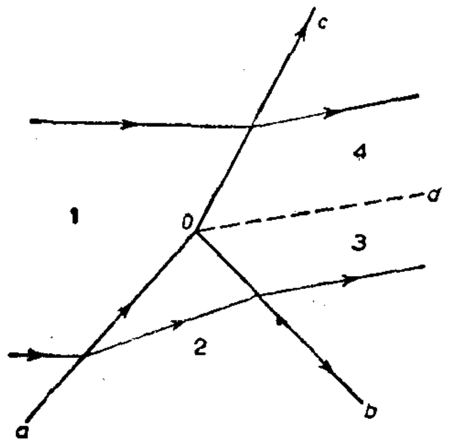


图 83

① 应当指出,激波不能分解成一个激波和一个稀疏波:容易看出,在这两个由交线出发的波中,压力和速度方向的改变是不可能协调一致的.

② 像通常的情形一样,切向间断面实际上是一个湍流区.

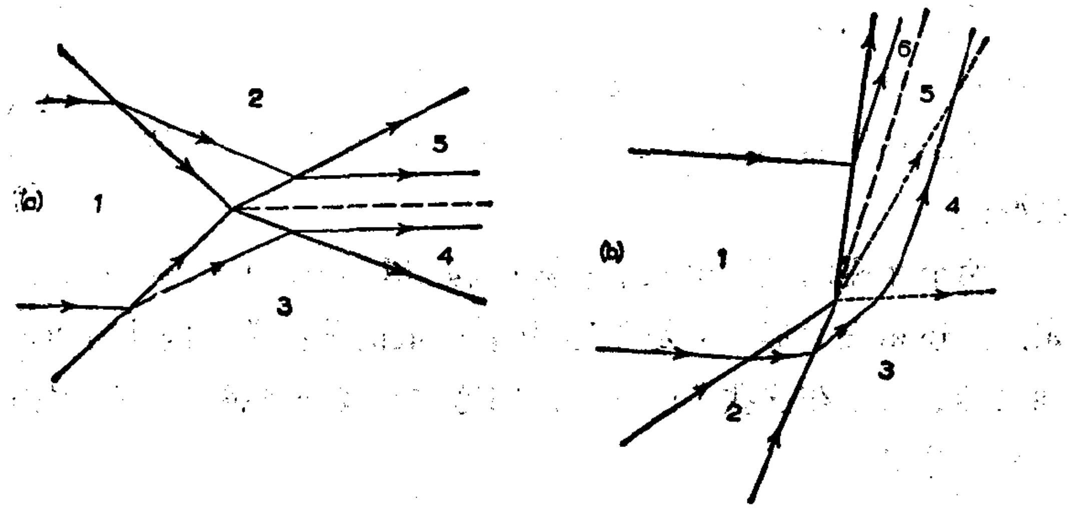


图 84

3—4 区中有四个条件(p, ρ 和两个速度分量不变)，如果不出现切向间断面 Od 的话，这四个条件是必须满足的. 然而出现切向间断面以后，就可以使得条件的数目减少为两个（压力和速度方向不变).

但是，不是任何一个激波都能用这种方法来分解的. 一个到达交线的激波决定于两个参数（当给定 1 区气体的热力学状态时)，例如来流的马赫数 M_1 和压力比 p_2/p_1. 只有在这两个参数平面上的某个区域内，一个激波才能分解成两个激波①.

包含两个到达交线的激波的相交，可以看作是由于其他原因所产生的两个激波之间的"碰撞". 这里，有两种本质上不同的情形，如图 84 所示.

第一种情形，两个激波的碰撞产生另外两个由交点出发的激

① 确定这个区域需要非常繁复的代数计算. 遗憾的是，已经发表的结果(例如参看 R. Courant and K. O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, 1948，有中译本，科学出版社，1986)，由于没有将到达交线的和由交线出发的激波加以区别，大体上是没有价值的. 这样就把两个到达交线的激波和一个由交线出发的激波情形也看成三重结构. 但是，这是由其他原因引起的两个激波所发生的相交，因而带着所有参数的确定值到达交线. 只有当这些任意参数之间有一定的关系时，两个激波才有可能"合成"一个激波，而这种参数间的联系是不大可能协调的.

波．如果要满足所有的必要条件，必须再形成一个切向间断面，而且切向间断面必须在新形成的两个激波之间.

第二种情形，不是形成两个激波，而是形式一个激波和一个稀疏波.

两个相碰的激波由三个参数(例如 M_1 和比值 p_1/p_2, p_1/p_3)确定．上述相交的形式只是在这些参数值的某些范围内才有可能．如果参数值不在这些范围之内，则这些激波在碰撞以前就一定已经发生分叉了.

图 85 画出了激波从运动气体和静业气体之间分界面上的反射．5 区是静止气体区，由切向间断面与运动气体隔开．在邻接于 5 区的 1 区和 4 区中，压力必须相同，而且等于 p_5．既然在激波上压力增加，显然激波一定从切向间断面反射出一个稀疏波 3，这样使压力降为起始的值.

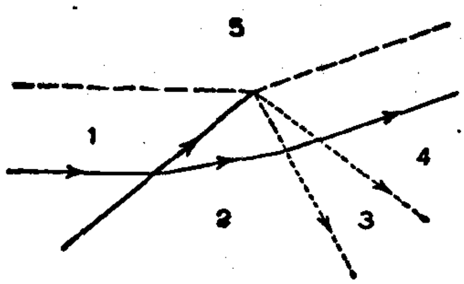


图 85

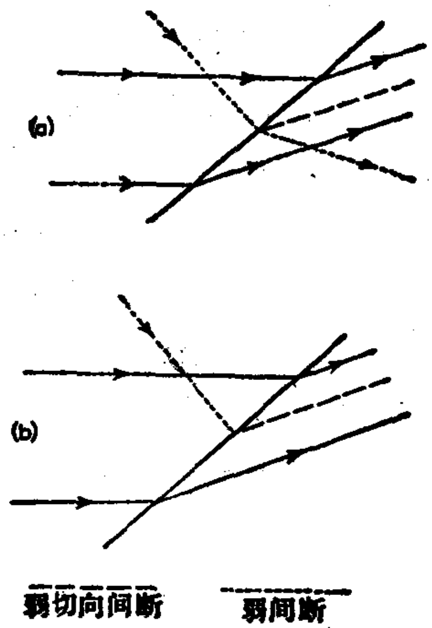


图 86

最后，简要地讨论激波与来自另外来源的弱间断面的相交．这里可以有两种情形，视激波后面的流动是超声速的还是亚声速的而定．在超声速的情形下(图 86a)，弱间断面在激波上经过"折

射"进入激波后的空间，激波本身在交线上不发生折射，但是有更高阶的奇异性，类似于弱间断面的性质．而且，激波上熵的改变一定在激波后面引起一个"弱切向间断面"，在这个弱切向间断面上，熵的导数是间断的．

但是，如果激波后面的流动是亚声速的，则弱间断就不能进入该区域，而是中止在交点上(图 86b)．在这种情形下，这个交点是一个奇点；可以证明，激波后面的速度分布在该点有对数型的奇异性质．此外，和前面的情形一样，在激波后面一定会出现熵的弱切向间断面①．

§ 103. 激波与固体表面的相交

在激波与固体表面的定常相交现象中，激波与边界层的相互作用起着重要的作用．这种相互作用非常复杂，直到现在，尚未在实验上和理论上作出充分的研究．但是，简单的一般讨论，仍能使我们得到若干重要的结果，现在在此加以说明②．

压力在激波上是间断的，且沿着气体运动的方向增大．由此，如果激波与固体表面相交，则在交线附近一段很短的距离上，必定存在有限的压力增量，即一定存在一个很大的正的压力梯度．但是我们知道，压力的迅速增加不可能出现在固壁附近（参看 § 40 末)；因为这样引起分离，从而改变绕物体流动的图象，使得激波离开物面达到一个足够远的距离．

然而，这种分析不适用于弱激波的情形．从 § 40 末给出的证明可以清楚地看出，边界层中不可能出现正的压力间断是由于假

---

① 关于激波与弱间断面相交的各种可能的类型，详细的定性和定量分析，见 S. P. D'yakov, *Soviet Physics JETP*, 6(33), 729, 739, 1958; *ДАН СССР* 99, 921, 1954.

② 边界层必然包含着一个邻接于固体表面的亚声速流动区域，激波不可能进入这个区域．在讨论激波与物面的相交时，我们略去这一事实，这并不影响下面的讨论．

定这种间断值很大的结果，即正的压力间断值必须超过某个决定于R值的界限，而这个界限随着R的增加而减小①.

因此，我们得到下面的重要结论．强激波与固体表面的定常相交是不可能的．固体表面只能与弱激波相交，而且R越大，则所允许的强度越小．这种激波的最大允许强度，还取决于边界层是层流的还是湍流的．如果边界层是湍流的，将延缓分离的发生(§45)．所以，在湍流边界层中，能有比层流边界层中更强的激波由固体表面发出②.

为了避免误解，必须着重指出：这些分析是基于在激波前面(即在激波上游)有边界层存在．因此，所得到的结果仅适用于由物体后缘出发的激波，而与从物体前缘发出的激波无关；例如，在绕尖楔的流动中，就会出现后一种情形，这种情形将在§104中详加讨论．在后一种情形下，气体是从外部(即从没有边界层的区域)到达尖楔的前缘．所以，前面的已有的讨论显然并不排斥发生从这种尖楔前缘出发的激波的可能性.

在亚声速流动中，只有当主流中压力沿固体表面向下游增加时，才能出现分离．然而，在超声速流动中，甚至在压力向下游减小时，也可能发生分离．这样的现象可以通过弱激波与分离的结合而产生，为产生分离所需的压力增量就会发生在激波中；在激波前面的区域中，压力向下游可以是增加的，也可以是减小的.

有关激波从边界层的亚声速区(或从分离线以后的湍流区)"反射"的复杂现象，现有的资料还不足以使我们给出其详细的图

---

① 在§40的问题中，已经确定出在距离Δx上能引起层流边界层分离的最小的压力改变量Δp．用到现在的情形上来，我们所关心的是在边界层厚度δ量级的距离上所出现的压力改变量，得出了决定Δp随雷诺数增加而减小的规律如下：

$$\frac{\Delta p}{p}\sim\frac{1}{R_x^{1/3}}\sim\frac{1}{R_\delta^{2/3}}.$$

② 现在已发表的资料，还不足以使我们能够规定最大的允许强度.

象．在这些现象中，起重要作用的事实是：由激波产生的扰动通过边界层的亚声速区可以向上、下游两个方向传播，并在边界层中可能引起新的间断．特别是，另一个弱激波在上游形成可以引起分离，由此将由外面入射到固体表面的强激波"排开"．在图 87 中，直线 a 是入射激波，直线 b 是在上游形成的激波，这激波在 O 点引起分离．当入射激波从湍流区的亚声速区"反射"时，可以预料到将会出现一个稀疏波．

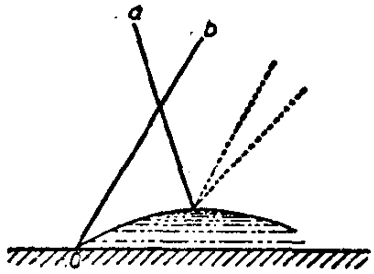


图 87

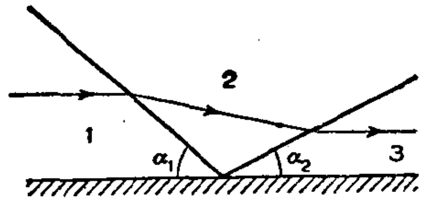


图 88

上面的所有讨论只针对定常相交的情形，即激波和物体处于相对静止状态．现在来研究非定常的相交情形，这时入射到物体上的是运动着的激波，所以交线沿物面运动．这样的相交伴随着有激波的反射：即在物面上除了入射激波之外，还形成一个由物面出发的反射激波．

我们将在随交线一起运动的坐标系中来研究这种现象；在这个坐标系中，激波是定常的．反射激波由交线本身发出，乃是最简单的激波反射，这种反射称为**正规**反射(图 88)．如果给定入射激波的入射角 α_1 和强度，则 2 区的流动就唯一地被确定了．反射激波后的气体速度必须折回一个角度，以使其速度重新平行于物面．当这个折回的角度被给定时，从激波极线方程就可以得到反射激波的位置和强度．对于某个给定的角，激波极线可确定出两个不同的激波，即弱激波解和强激波解(§86)．实验结果表明，反射激波总是属于弱激波族的，以后我们假定取弱激波解．必须指出，当

入射激波强度趋于零时，则反射激波的强度也趋于零，同时反射角 α_2 趋于入射角 α_1，这正如我们按声学近似理论所预料的那样．在 $\alpha_1 \to 0$ 的极限情形下，弱族反射激波就逐渐变成从"正面"入射所得到的反射激波（§93，问题 1）.

正规反射的数学计算（在理想气体中）不会有原则上的困难，但是其代数运算很繁．这里只打算讲若干结果①.

根据激波极线的一般性质可以清楚地看出，并不是入射激波参数（入射角 α_1 和压力比 p_2/p_1）取任意值时都能出现正规反射．压力比 p_2/p_1 给定时，有一个最大可能的入射角 α_{1k}②，而当 $\alpha_1 > \alpha_{1k}$ 时，正规反射是不可能的．当 $p_2/p_1 \to \infty$时，最大的入射角趋于 anc $\sin(1/\gamma)$（对于空气来说是40°）．当 $p_2/p_1 \to 1$ 时，α_{1k} 趋于90°，即对任何入射角来说，正规反射都是可能的．图 89 画出了关于空气的 α_{1k} 随 p_1/p_2 变化的函数曲线.

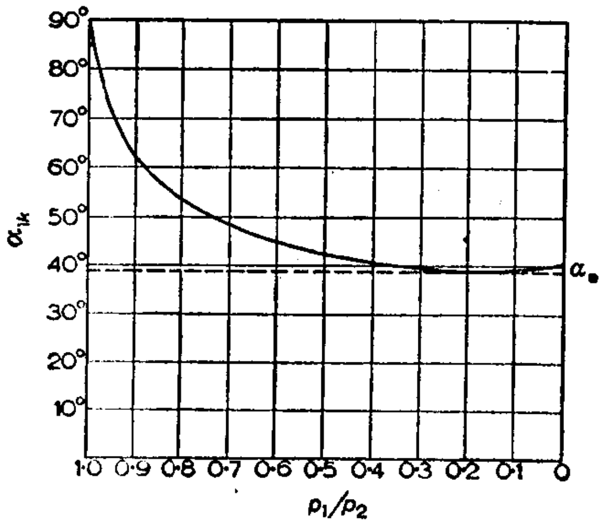


图 89

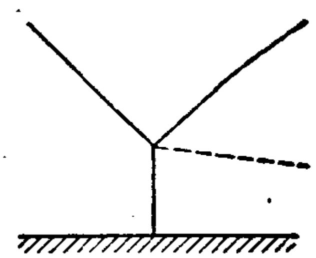


图 90

① 有关激波反射的更为详细的论述，可参看 R. Courant, K. O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, 1948; 有中译本，科学出版社，1980; W. Bleakney, A. H. Taub, *Reviews of Modern Physics*, 21, 584, 1949.

关于激波几乎是正面入射到接近于 180° 的拐角前缘的正规反射，以及激波在类似的拐角前缘上掠过时的衍射，这两个复杂问题已由 M. J. 莱特希尔给出了解答 (*Proceedings of the Royal Society*, A198, 454, 1949; 200, 554, 1950).

② 这是强反射激波和弱反射激波重合时入射角的值.

一般说来，反射角 α_2 与入射角 α_1 是不等的．有这样一个入射角的值 α_*，当 $\alpha_1<\alpha_*$ 时，反射角 $\alpha_2<\alpha_1$；反之，当 $\alpha_1>\alpha_*$ 时，$\alpha_2>\alpha_1$．α_* 的值为 $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}(\gamma-1)$（对于空气来说为 39.2°）；它不依赖于入射激波的强度．

当 $\alpha_1>\alpha_{1k}$ 时，正规反射是不可能的，因而入射激波必在离开物面的一定距离上发生分叉，所以我们有图 90 所示的图象，图中有三个激波以及一个从入射激波分叉点发出的切向间断面．

§ 104. 绕拐角的超声速流动

在研究物面上拐角角顶线附近的流动时，仍然只需考虑角顶线上的一小段，并且假设它是直线，拐角是由两个平面相交而成的．如果拐角的角度大于 π，我们就称流动在拐角外；如果拐角的角度小于 π，就称流动在拐角内．

亚声速的绕角流动与不可压缩流体的绕角流动没有实质上的差别．然而，超声速的绕角流动则是完全不同的；其中一个重要的性质是会出现由拐角角顶线发出的间断面．

首先来研究超声速气流沿拐角一边到达顶点时的可能的流动图象．根据超声速流动的一般性质，在气流到达顶点以前，气流一直是均匀的．气流折转到平行于拐角另一边的过程，是在由顶点发出的稀疏波中发生的，这时流动图象是由弱间面（图 91 中的 Oa 和 Ob）分成的三个区域组成的：沿 AO 边运动的均匀气流 1，在稀疏波 2 中折转，然后又以匀速度沿拐角的另一边运动．应当指出：这时根本没有湍流区形成；反之，在不可压缩流体的类似流动中，一定形成一个以拐角的角顶线为分离线的湍流区（§ 35 中的图 16）．

设 v_1 是来流（图 91 中的 1 区）的速度，c_1 是来流中的声速．则

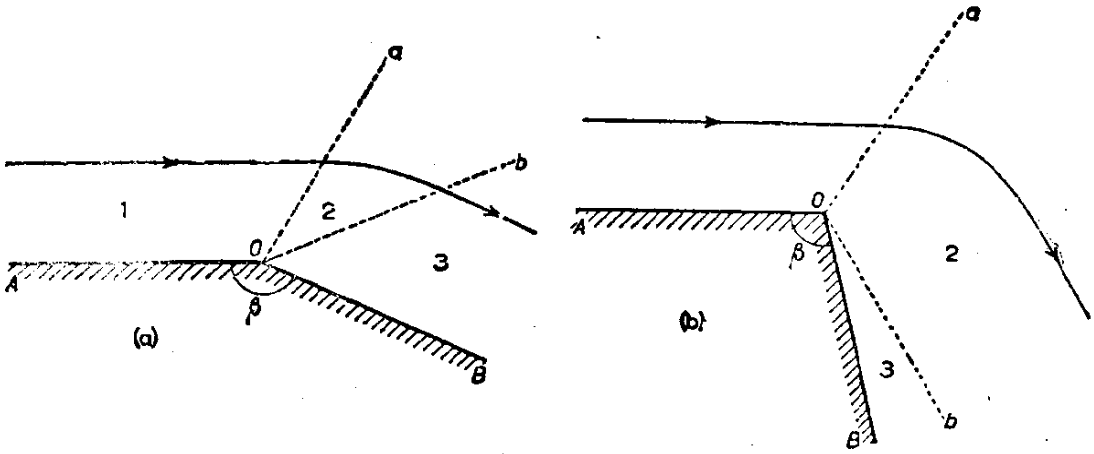


图 91

弱间断面 Oa 的位置可根据它与流线交成马赫角这个条件，直接由马赫数 $M_1=v_1/c_1$ 确定. 稀疏波中的速度和压力的变化由公式(101.12)—(101.15)确定；剩下的只需指定一个参考方向，从它开始量度这些公式中的角度 ϕ. 直线 $\phi=0$ 对应于 $v=c=c_*$; 当 $M_1>1$ 时，实际上并不存在这样的直线，因为处处都有 $v/c>1$. 但是，如果想像稀疏波在形式上扩展到 Oa 左边的区域中去，则可以利用公式(101.12)，并求出间断面 Oa 必须对应 ϕ 的一个值：

$$\phi_1=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c_1}{c_*},$$

同时，从 Oa 到 Ob 时，角 ϕ 应是增大的. 根据速度方向变到平行于拐角的边 OB，可以定出间断面 Ob 的位置.

稀疏波中气流的折转角不能大于 § 101 问题 2 中所确定的值 $\chi_{\max}$. 如果绕流经过的角 β 小于 $\pi-\chi_{\max}$，则稀疏波不可能使气流转过所需的角度，因而得到图 91 b 所示的流动图象. 因此，稀疏波 2 一直进行到压力等于零为止（到达 Ob 线），稀疏波与固壁之间由一个真空区(3 区)隔开.

然而，上述的流动图象并不是唯一可能的图象. 图 92 和图 93 画出了不同的图象，其中都有一个静止气体的区域紧贴着拐角的第二个边，由一个切向间断面将这静止气体区域和运动气体区

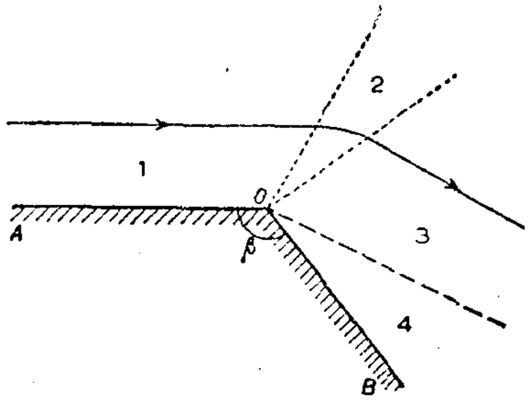


图 92

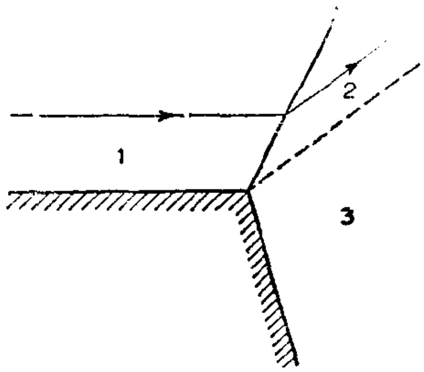


图 93

域隔开；通常，切向间断面要变成一个湍流区，所以上述情形对应于出现分离的情形①．在稀疏波(图 92)或激波(图93)中，气流转过了一定的角度．但是只有当激波不太强时，通过激波折转的情形才是可能的(根据 § 103 所给出的一般性讨论)．

在任何一个具体情形中，到底会出现哪种流动图象，一般说来取决于远离拐角的流动条件．例如，当气流流出喷管时(这里的拐角顶点是出口处的边缘)，了解喷出气流的压力 p_1 和外部介质的压力 p_e 之间的相互关系是重要的．如果 $p_e<p_1$，流动是图 92 所示的类型；因此稀疏波的位置和张角由 3 区和 4 区中压力都等于 p_e 的条件确定．p_e 越小，则气流必须转过的角度也越大．但是，如果角 β(图 92)加大，气体压力就不可能达到所需的值 p_e；在压力降为 p_e 之前，速度方向就变得平行于拐角的边 OB 了．所以，出口边缘附近的流动就如图 91(a)所示．出口 OB 外侧附近的压力完全由角度 β 决定，而不取决于压力 p_e；只要在气流离出口一段距离处，压力就最后降为 p_e．

反之，如果 $p_e>p_1$，则绕出口边缘的流动就是图 93 所示的类型，有一个从边缘出发并将压力由 p_1 升高到 p_e 的激波．然而，这

① 根据实验结果，气体的可压缩性使得切向间断面所引起的湍流区的张角有所减小．

只有在 p_e 和 p_1 的差别不太大时，也就是在激波不太强时，才有可能；否则，在喷管的内壁上会有分离，而且激波进入喷管内部，如§90 所述.

其次，我们来研究拐角内的流动. 在亚声速的情形下，这种流动伴随着有拐角顶点前面某个点上的分离(参看§40末). 然而，在超声速来流的情况，流动的转向可由从顶点发出的激波来实现(图 94). 这里还必须说明一点，只有在激波不太强时，这种简单的无分离流动图象才是可能的. 激波的强度随气流折转角χ的增加而增加，因此我们可以说，只有在 χ 不太大时，无分离的流动才是可能的.

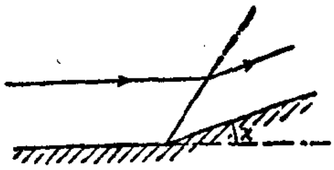


图 94

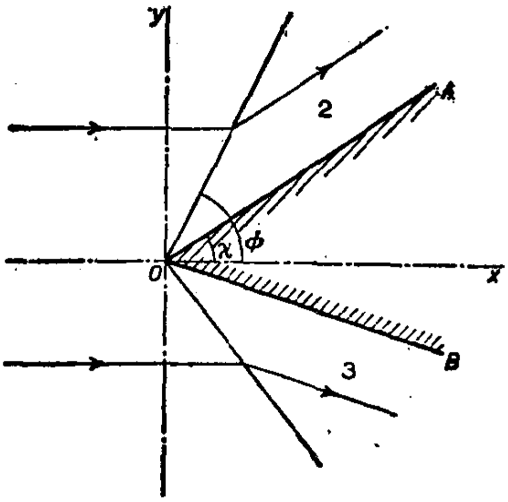


图 95

现在来研究自由超声速来流流向楔形顶点时所产生的流动图象(图 95). 气流在通过从顶点发出的两个激波后，流向被折转到平行于楔形两边的方向. 正如§103 中已经说明的，这是一种能够从固体表面发出任意强度激波的特殊情形.

如果已知来流的速度 v_1 和声速 c_1，就可以确定激波的位置和激波后面区域中的气体流动. 速度 v_2 的方向必须平行于楔形的一边 OA: $\frac{v_{2y}}{v_{2x}}=\mathrm{tg}\chi$. 因此，利用一条通过原点并与横轴交成

已知角χ的弦(图 50)，就可以直接从激波极线定出v_2和确定激波位置的角ϕ，这在§86 中讲过．我们已经知道，χ给定时，激波极线将给出两个不同的激波解，它们的ϕ值不同．其中一个(对应于图 50 中的点B)是较弱的，一般说来，它保持激波后的流动为超声速流；另一个较强，它使得激波后的流动变成亚声速的．在绕有限的楔形物面流动的情形下①，总是选取前者，即弱激波解．应该记住，这种选择实际上取决于远离楔形的流动条件．在绕很尖锐的楔形(χ很小)的流动中，形成的激波显然是很弱的．我们很自然地认为：随着楔顶角的增加，激波强度是单调增加的；这相当于沿激波极线上弧QC(图 50)从Q到C的移动．

在§86 中还知道，激波上气流速度矢量的折转角不能大于某个取决于M_1的值χ_{max}，因此，如果楔形的任何一边与来流方向的夹角大于χ_{max}，则上述流动图象是不可能出现的．在这种情形下，楔形附近的气流必须是亚声速的，这是由于楔形前面的某个位置上出现激波而形成的(参看§114)．因为χ_{max}随M_1而单调增加，所以我们也可以说：对于给定的角χ，来流的M_1必须大于某个值M_{1min}.

最后还应指出，如果楔形两边相对于来流的位置如图 96 所示，那末，激波当然只在楔形的一侧形成；另一侧则由稀疏波而使气流折转．

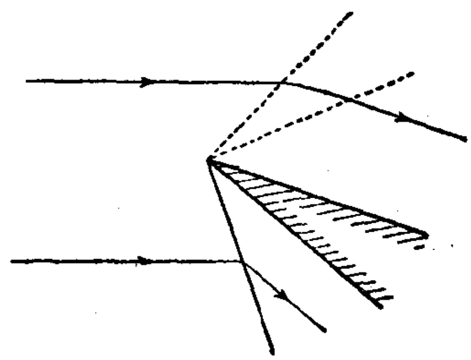


图 96

① 绕两个无限平面交成的尖楔的流动这种纯属形式上的问题，是没有物理意义的．

问 题

设在绕顶角很小($\chi \ll 1$)的楔形流动中，M_1值很大($M_1 \gg 1/\chi$)，试求此时气流中激波的位置和强度.

解: 当$\chi \ll 1$时，激波极线给出两个ϕ值，一个接近于零，另一个则接近于$\frac{1}{2}\pi$. 我们所要求的弱激波对应于前一个值，它的值为$\phi = \frac{1}{2}(\gamma+1)\chi$；参看§86中的问题1. 根据式(86.9)，压力比为$p_2/p_1 = \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)M_1^2\chi^2$. 激波后的M值为

$$M_2 = \frac{1}{\chi}\sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}},$$

也就是说，M_2仍旧远大于1，但是并不远大于$1/\chi$.

§ 105. 绕锥形物体的流动

物体上尖凸块附近的定常超声速流动，是个三维问题，而且比绕二维尖楔(其前缘为一直线)的流动远为复杂. 直到现在，对这个问题尚未作出全面的一般性研究. 其中唯一已经完全解决了的问题是绕轴对称尖凸块的流动，下面就讨论这种情形.

在靠近尖凸块的顶点处，轴对称的尖凸块可以看成是一个正圆锥，由此把问题归结为均匀来流绕零攻角正圆锥的流动. 在定性上，其流动图象如下所述.

就像类似的绕二维尖楔的流动一样，气流中一定会形成一个激波(A. 布塞曼，1929)，同时从对称性出发，这个激波显然是一个与被绕流圆锥共轴的锥面，而且有共同的顶点(图97表示由一个通过圆锥轴线的平面在圆锥上截取的截面). 但是，现在的情况与二维的情形不同，激波并没有把气体的速度转过整个角度χ，以使气体沿着圆锥表面流动(2χ是圆锥的顶角). 在通过间断面之后，流线变弯，并渐近地趋向于圆锥的母线. 流线的这一弯曲，伴随着

密度的不断增加(除了在激波上密度的增加之外)以及速度的相应减小. 在紧靠着激波后面的区域中，一般说来速度仍然是超声速的(和二维的情形一样,由激波极线的超声速部分确定其速度),但是在圆锥的表面上,速度可以是亚声速的. 和二维的情形一样,对于来流马赫数 $M_1=v_1/c_1$ 的每一个值，相应地存在圆锥顶角的某个极限值 χ_{max},超过这一极限值,这种绕流就不可能存在.

圆锥形激波与来流中的所有流线相交成同一角度,因此,激波是等强度的. 于是可以得出结论(参看 §106):激波后面的流动也是等熵的势流.

根据问题的对称性及其自相似性的特性(在所考虑的条件中根本没有固定的特征长度),很明显,激波后所有的量(速度、压力)的分布都只依赖于角度 θ，这 θ 是从圆锥顶点指向所讨论点的矢径与圆锥轴线(图 97 中的 x 轴)的夹角. 因此,运动方程组是常微分方程组；这些方程在激波上的边界条件，由激波极线的方程确定,而在圆柱表面上的条件是:速度必须平行于圆锥的母线.但是,这些方程不能积分成解析的形式，而不得不作数值计算. 请读者

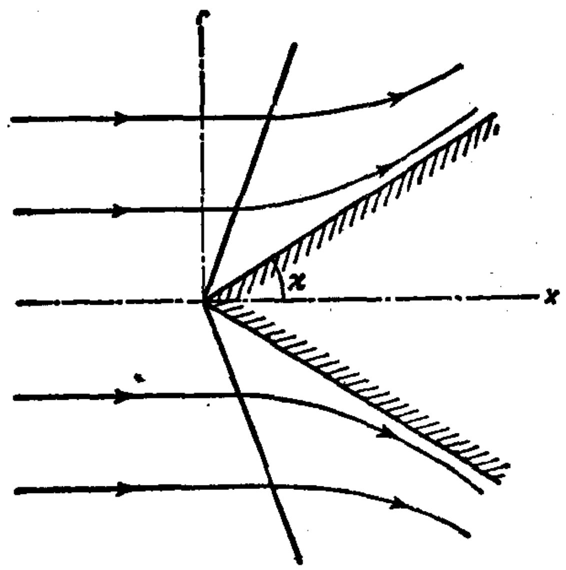


图 97

到别的著作① 中去查找有关的计算结果，本书只给出最大可能的圆锥角 χ_{max} 和 M_1 之间的函数曲线(§86中图51). 我们还可以指出：当 $M_1 \to 1$ 时，角 χ_{max} 趋于零：

$$\chi_{max} = 常数 \times \sqrt{\frac{M_1 - 1}{\gamma + 1}}, \tag{105.1}$$

χ_{max} 可由一般的跨声速相似律(118.11)导出；其中常数与 M_1 以及与所讨论的气体性质无关.

只有在圆锥顶角非常小的极限情形下，绕圆锥流动问题才可能有解析解. 显然，在这种情形下，各点的气流速度与来流速度 $\boldsymbol{v}_1$ 没有多大差别. 用 $\boldsymbol{v}$ 表示所讨论点上的气体速度与 $\boldsymbol{v}_1$ 之间的(很小的)差值，同时利用 $\boldsymbol{v}_1$ 的速度势 ϕ，就可以应用线化方程(106.4)；如果取极轴沿着圆锥轴线的柱坐标 x, r, ω (ω 是极角)，则方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \tag{105.2}$$

或者，对于轴对称解，则有

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) - \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \tag{105.3}$$

式中

$$\beta = \sqrt{\frac{v_1^2}{c_1^2} - 1}. \tag{105.4}$$

为了使速度分布只是 θ 的函数，势函数一定具有下列形式：$\phi = xf(\xi)$，其中 $\xi = r/x = \mathrm{tg}\,\theta$. 将上式代入方程(105.3)，得到函数 $f(\xi)$ 的方程为

$$\xi(1 - \beta^2 \xi^2) f'' + f' = 0,$$

① 例如：Н. Е. Кочин, И. А. Кебель, Н. В. Розе, *Теоретическая Гидромеханика*, Часть II, СТР. 193, Гостехиздат, 1948; L. Howarth ed., *Modern Developmants in Fluid Dynamics: High Speed Flow*, Vol. 1, Ch. 5, Oxford 1953.

这个方程的解是初等函数．平凡解

$$f=\text{常数}$$

对应于均匀流动；另一个解为

$$f=\text{常数}\times\left(\sqrt{1-\beta^2\xi^2}-\operatorname{arcch}\frac{1}{\beta\xi}\right).$$

在圆锥表面上(即当 $\xi=\operatorname{tg}\chi\approx\chi$ 时)的边界条件为

$$\frac{v_r}{v_1+v_x}\approx\frac{1}{v_1}\frac{\partial\phi}{\partial r}=\chi \tag{105.5}$$

或

$$f'=v_1\chi.$$

因此，非平凡解中常数为 $v_1\chi^2$，同时可得区域 $x>\beta r$ 中的势函数表达式如下①：

$$\phi=v_1\chi^2\left(\sqrt{x^2-\beta^2r^2}-x\operatorname{arcch}\frac{x}{\beta r}\right). \tag{105.6}$$

应当指出：当 $r\to0$ 时，ϕ 有对数奇性．

现在可以求出速度分量：

$$\left.\begin{aligned}v_x&=-v_1\chi^2\operatorname{arcch}\frac{x}{\beta r},\\ v_r&=\frac{v_1\chi^2}{r}\sqrt{x^2-\beta^2r^2}.\end{aligned}\right\} \tag{105.7}$$

圆锥表面上的压力则按公式(106.5)计算；因为当 $r\to0$ 时，ϕ 有对数奇性，所以(当 r 很小时)圆锥表面上的速度 v_r 远大于 v_x，于是，我们只需保留压力公式中带 v_r^2 的项．结果为

$$p-p_1=\rho_1v_1^2\chi^2\left[\ln\frac{2}{\beta\chi}-\frac{1}{2}\right]. \tag{105.8}$$

所有这些用线化理论导出的公式，当M_1远大于$1/\chi$时就不再适用了(参看 §119)．

像绕圆锥的对称流动一样，绕具有任意截面的锥体的流动也

---

① 在这种近似的条件下，圆锥面 $x=\beta r$ 就是弱间断面．

是自相似的流动．它根本没有特征长度的参数，所以速度分布只可能是坐标的比值 $y/x, z/x$ 的函数，即速度沿着通过原点（锥体的顶点）的任何直线是不变的．这种自相似流动称为锥形流①．

问　题

设圆锥的顶角 2χ 很小，且攻角 α 也很小，试确定绕该圆锥的流动（C. 法拉里，C. Ferrari，1937）②．

解：取圆锥的轴线（而不是来流的方向）为 x 轴；如果略去高阶量（～$\alpha\phi$），则势函数的线化方程(105.2)不变，利用势函数可定出气体速度为 $v_1+\nabla\phi$．圆锥表面上的边界条件为

$$\frac{v_1\sin\alpha\cos\omega+v_r}{v_1\cos\alpha+v_x}\approx\alpha\cos\omega+\frac{1}{v_1}\frac{\partial\phi}{\partial r}\approx\chi.$$

寻求下列和式的 ϕ：

$$\phi=\phi^{(1)}(x,r)+\cos\omega\cdot\phi^{(2)}(x,r),\tag{1}$$

其中 $\phi^{(1)}$ 的表达式为式(105.6)，而 $\phi^{(2)}$ 满足边界条件 $\frac{\partial\phi^{(2)}}{\partial r}=-v_1\alpha$．函数 $\phi^{(2)}$ 可以写为 $rf\left(\frac{r}{x}\right)$，再将 $rf\cos\omega$ 代入方程(105.2)，则得 f 的方程为

$$\xi f''(\beta^2\xi^2-1)+f'(2\beta^2\xi^2-3)=0.$$

平凡解 $f=$常数 对应于（以速度 $v_1\alpha$）沿垂直于圆锥轴方向的均匀流动；另一个解得出

$$\phi^{(2)}=v_1\beta^2\chi^2\alpha\left(\frac{x}{\beta r}\sqrt{x^2-\beta^2r^2}-\beta r\,\mathrm{arcch}\,\frac{x}{\beta r}\right).$$

气体速度为 $v_1+v^{(1)}+v^{(2)}$，其中，$v^{(2)}=\nabla\phi^{(2)}$，而 $v^{(1)}$ 由公式(105.7)给出．压力由下列公式计算：

$$p-p_1=-\frac{1}{2}\rho_1\left\{\left(v_1\cos\alpha+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(v_1\sin\alpha\cos\omega+\frac{\partial\phi}{\phi r}\right)^2\right.$$

---

① 有关这类流动的各种问题的详细讨论，可参看E. Carafoli, *High Speed Aerodynamics (Compressible Flow)*, Pergamon Press, London, 1958.

② 有关任意细长的旋成体这一类问题的解，可参看 F. I. Frankl and E. A. Karpovich, *Gas Dynamics of Thin Bodies*, §2-7, Interscience, New York, 1953（中译本：Ф. И. 伏朗克尔，E. A. 卡波维奇：《薄物体的气体动力学》，杜棣华译，科学出版社，1958）．

$$+\left(-v_1\sin\alpha\sin\omega+\frac{\partial\phi}{r\partial\omega}\right)^2-v_1^2\Big\},$$

其中必须保留到α的χ的二阶项．由下式即可求出锥面上的压力为

$$p-p_1=\rho_1 v_1^2\Big(\chi^2\ln\frac{2}{\beta\chi}-\frac{\chi^2+\alpha^2}{2}$$
$$-2\alpha\chi\cos\omega+\alpha^2\cos 2\omega\Big).$$

第十二章　气体的二维流动

§ 106. 气体的势流

下面我们将遇到很多重要情形，其中可压缩气体的流动几乎处处都可看作是势流. 这里将导出势流的一般方程，并讨论这些方程的适用性问题.

可压缩气体的势流在穿过激波以后，通常要变成有旋流. 但是也有一种例外，即定常势流穿过强度沿波面不变的激波时的情况；例如，当均匀流穿过一个激波而这激波与每条流线的交角都相同时，情况就是如此①；这时，激波后面的流动仍然是势流. 为了证明这点，我们利用下列形式的欧拉方程：

$$\frac{1}{2}\nabla v^2-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

(参看(2.10))，或

$$\nabla\left(w+\frac{v^2}{2}\right)-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=T\nabla s,$$

式中利用了热力学恒等式：$dw=Tds+\frac{dp}{\rho}$. 但在激波前面的势流中，$w+\frac{v^2}{2}=$常数，而它在激波上又是连续的，因而这个量在激波后面处处相同，所以

$$\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=-T\nabla s. \tag{106.1}$$

激波前面的势流是等熵的. 在任意激波的一般情况下，熵的

---

① 在超声速绕尖楔或圆锥的流动中(§ 104, § 105)，我们已经遇到过这种情形.

间断值在整个激波面上是变化的，在激波后面的区域内，$\nabla s \neq 0$，因而 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 也不为零. 但是，若激波是等强度的，则其中熵的间断值就是常数，所以激波后面的流动也是等熵的，即 $\nabla s=0$. 由此可知，或者 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$，或者矢量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 处处平行. 但后一种情况是不可能的，因为在激波上，$\boldsymbol{v}$ 总有非零的法向分量，但 $\nabla\times\boldsymbol{v}$ 的法向分量却总是为零(因为这个法向分量是由速度切向分量的切向导数给出的，而速度的切向分量又是连续的).

还有一种重要情形，即势流通过的是弱激波，这时，尽管有激波，势流仍在继续. 我们已经知道(§83)，在这样的激波中，熵的间断值与压力或速度间断值相比是三阶量. 因此，由(106.1)可知，在激波后面，$\nabla\times\boldsymbol{v}$ 也是三阶量. 这就使我们可以认为，在激波后面是势流，其误差是更高阶的小量.

现在来推导可压缩气体作任意定常势流运动时，其速度势的一般方程. 为此，我们利用欧拉方程

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p=-\frac{c^2}{\rho}\nabla\rho,$$

从连续方程 $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\equiv\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho=0$ 中消去密度，得

$$c^2\nabla\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=0.$$

引进速度势，使 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$，并按分量写出，即得方程

$$\begin{aligned}&(c^2-\phi_x^2)\phi_{xx}+(c^2-\phi_y^2)\phi_{yy}+(c^2-\phi_z^2)\phi_{zz}\\&-2(\phi_x\phi_y\phi_{xy}+\phi_y\phi_z\phi_{yz}+\phi_z\phi_x\phi_{zx})=0,\end{aligned}\qquad(106.2)$$

式中的下标表示偏导数. 特别地，对于二维流动，我们有

$$(c^2-\phi_x^2)\phi_{xx}+(c^2-\phi_y^2)\phi_{yy}+2\phi_x\phi_y\phi_{xy}=0.\qquad(106.3)$$

在这些方程中，声速必须通过速度表示出来；原则上，这种表示式可以用伯努利方程 $w+\frac{v^2}{2}=$常数和等熵方程 $s=$常数求得. 公式(80.18)给出用 v 表示 c 的函数关系，适用于理想气体的情况.

若各点的气体速度与无穷远来流速度相比，它们的大小和方

向差别都不大，则方程(106.2)可大为简化①．这意味着激波(如果有的话)较弱，因而势流不受破坏．

仿照前面讲的类似情况，我们用 $\boldsymbol{v}$ 表示给定点上气体速度与来流速度之间微小的速度差．用 $\boldsymbol{v}_1$ 表示来流速度，则合速度可写成 $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}$．现在用 ϕ 表示速度 $\boldsymbol{v}$ 的势，即 $\boldsymbol{v}=\nabla\phi$，则由(106.2)，通过代换 $\phi\rightarrow\phi+xv_1$，可求得这个速度势的方程．我们取 x 轴沿矢量 $\boldsymbol{v}_1$ 的方向．然后，我们把 ϕ(的导数)看作是小量，并略去所有高于一阶的项，即得下列线性方程：

$$(1-\mathrm{M}_1^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0, \tag{106.4}$$

这里，$\mathrm{M}_1=\dfrac{v_1}{c_1}$；当然，其中声速是无穷远处的值．

任何一点的压力，都可按同样的近似程度，利用一个公式来确定，而以速度来表出，这个公式可求得如下．我们把 p 看作是 w 的函数(s 给定时)，利用关系式 $\left(\dfrac{\partial w}{\partial p}\right)_s=\dfrac{1}{\rho}$，则可写出

$$p-p_1\approx\left(\frac{\partial p}{\partial w}\right)_s(w-w_1)=\rho_1(w-w_1).$$

由伯努利方程，得

$$w-w_1=-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v})^2-\boldsymbol{v}_1^2]$$

$$\approx-\frac{1}{2}(v_y^2+v_z^2)-v_1v_x,$$

所以

$$p-p_1=-\rho_1v_1v_x-\frac{1}{2}\rho_1(v_y^2+v_z^2). \tag{106.5}$$

在这个表达式中，横向速度平方项一般应予保留，因为在 x 轴附近

① §105 中已讨论过这类情况之一(绕细锥的流动)；其它的将在有关气体绕任意薄物体流动的问题中遇到．

的区域内（特别是在物面上），导数$\frac{\partial\phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\phi}{\partial z}$可能比$\frac{\partial\phi}{\partial x}$大得多.

但若马赫数 M_1 很接近于1（跨声速流动），以致方程（106.4）第一项的系数是个小量，则该方程不适用. 显然，在这种情况下，必须保留 ϕ 对 x 导数的更高阶项. 为了推导这个相应的方程，我们回到原方程（106.2）；在略去那些明显是小量的项以后，方程变为

$$\left(1-\frac{\phi_x^2}{c^2}\right)\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=0. \tag{106.6}$$

在目前情况下，速度 $v_x\cong v$，声速 c 接近于临界速度 c_*（现在 v 表示合速度）. 因此，可以写成 $c-c_*=(v-c_*)\left(\frac{dc}{dv}\right)_{v=c_*}$，或 $c-v=(c_*-v)\left[1-\left(\frac{dc}{dv}\right)_{v=c_*}\right]$. 利用以下事实，即当 $v=c=c_*$ 时，由（80.4）可得$\frac{d\rho}{dv}=-\frac{\rho}{c}$，于是可写出（当 $v=c_*$ 时）

$$\frac{dc}{dv}=\frac{dc}{d\rho}\frac{d\rho}{dv}=-\frac{\rho}{c}\frac{dc}{d\rho},$$

所以

$$c-v=\frac{c_*-v}{c}\frac{d(\rho c)}{d\rho}=\alpha_*(c_*-v). \tag{106.7}$$

这里我们利用了导数$\frac{d(\rho c)}{d\rho}$的表达式(92.9)，而 α_* 表示 $v=c_*$ 时(95.2)式中 α 的值；理想气体的 α 是常数，所以 $\alpha_*=\alpha=\frac{1}{2}(\gamma+1)$. 按同样的准确度，这个方程可写为

$$\frac{v}{c}-1=\alpha_*\left(\frac{v}{c_*}-1\right). \tag{106.8}$$

此式给出跨声速流动中马赫数 M 与 M_* 之间的一般关系.

利用这个公式，我们可以写出

$$1-\frac{v_x^2}{c^2}\approx 1-\frac{v^2}{c^2}\approx 2\left(1-\frac{v}{c}\right)\approx 2\alpha_*\left(1-\frac{v}{c_*}\right).$$

最后，我们按代换 $\phi\to c_*(x+\phi)$，引进新的势，因而有

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{v_x}{c_*}-1,\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{v_y}{c_*},\quad \frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{v_z}{c_*}. \qquad (106.9)$$

把这些式子代进(106.6)，我们最后得到跨声速流动的速度势方程如下(其各点速度几乎都平行于 x 轴)：

$$2\alpha_*\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \qquad (106.10)$$

在这里，气体的特性只通过常数 α_* 表现出来. 下面我们将看到，这个常数决定着跨声速流动特点对气体性质的全部依赖关系.

对另一种极限情形， 即 M_1 的值非常大的情形， 线性方程(106.4)也不适用. 不过，遇到这样的 M_1 值，由于出现强激波，使得势流实际上已不可能存在了(参看 § 119).

§ 107. 定常简单波

我们来确定气体定常二维超声速流动方程的一般形式解，这种解所描述的流动是：在无穷远处有均匀的平面平行气流，然后当它绕一个弯曲的剖面流过时，折转一个角度. 我们在讨论拐角附近的流动时，已经遇到过这种解的一个特殊情形：本来是个平行气流，沿着拐角的一边流动，流到角顶处发生折转. 在这个特殊的解中，所有的量(速度的两个分量、压力和密度)都只是一个变量即角度 ϕ 的函数. 所以其中每一个量都可表成其它任一个量的函数. 因为这个解必须是待求的一般解的一个特殊情形，自然就可在以下假定的基础上来寻求一般解，即假定 p, ρ, v_x, v_y (运动平面取为 xy 平面) 这些量中的每一个都可表成其它任一个的函数. 当然，这个假定对运动方程的解加了相当大的限制，因而这样求得的解就不是那些方程的通积分了. 在一般情况下， 作为两个坐标 x, y

的函数的量 p, ρ, v_x, v_y 中的每一个，都可表示成这些量中任何两个量的函数.

因为在无穷远处是均匀流，其中所有的量都是常数，特别是熵 s 为常数；又因为在理想流体的定常流动中，沿流线的熵是不变的，所以，只要在气体中没有激波，显然在全空间保持 $s=$ 常数；下面，我们就作这样的假定.

欧拉方程和连续方程为

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\quad v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)=0.$$

把偏导数写成雅可比行列式的形式，可将这些方程改写如下：

$$v_x\frac{\partial(v_x,y)}{\partial(x,y)}-v_y\frac{\partial(v_x,x)}{\partial(x,y)}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p,y)}{\partial(x,y)},$$

$$v_x\frac{\partial(v_y,y)}{\partial(x,y)}-v_y\frac{\partial(v_y,x)}{\partial(x,y)}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p,x)}{\partial(x,y)};$$

$$\frac{\partial(\rho v_x,y)}{\partial(x,y)}-\frac{\partial(\rho v_y,x)}{\partial(x,y)}=0.$$

现在取（比如说）x 和 p 作为独立变量. 为了实现这一变换，只须将上面的方程乘以$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,p)}$，这样求得的方程形式不变，只是方程中每个雅可比行列式的分母 $\partial(x,y)$ 都换成了$\partial(x,p)$. 现在把这些雅可比行列式展开，记住，所有的量 ρ, v_x, v_y 都被假设成只是 p 的函数，而不是 x 的函数，所以它们对 x 的偏导数为零. 于是得

$$\left(v_y-v_x\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{dv_x}{dp}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial x},\quad \left(v_y-v_x\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{dv_y}{dp}=-\frac{1}{\rho};$$

$$\left(v_y-v_x\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{d\rho}{dp}+\rho\left(\frac{dv_y}{dp}-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{dv_x}{dp}\right)=0.$$

这里$\frac{\partial y}{\partial x}$表示$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_p$. 在这些方程中，除$\frac{\partial y}{\partial x}$以外，所有的量按假定都

只是 p 的函数，而不显含 x. 由此我们可以断定，首先，$\frac{\partial y}{\partial x}$ 也只是 p 的函数：$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_p=f_1(p)$，于是，

$$y=xf_1(p)+f_2(p), \tag{107.1}$$

式中，$f_2(p)$ 是压力的任意函数.

如果我们利用早已熟知的绕拐角流动中关于稀疏波的特解（§101, §104），则毋须再作进一步计算. 记住，在这个解中，所有的量（包括压力）沿任一条通过角顶的直线（特征线）都是常数. 这个特解显然对应于如下情形，即一般表达式（107.1）中任意函数 $f_2(p)$ 恒等于零. 函数 $f_1(p)$ 由 §101 所求得的公式确定.

对于各个不同的常数 p，方程(107.1)就在 xy 平面内定出一族直线. 这些直线与流线在每一点的交角都是马赫角. 我们从在 $f_2\equiv 0$ 的特解中直线族 $y=xf_1(x)$ 所具有的这种性质，可以立即看出这一结果. 于是，在一般情况下，(自物面出发的)某族特征线是由这样的直线组成，即沿着这些直线，所有的量保持不变，但这些直线不再是共点的了.

从数学上讲，上述流动的特性，与一维简单波的特性完全类似，在一维简单波中，特征线的一族是 xt 平面中的直线族(参看 §94, §96, §97). 因此，目前所讨论的这种流动在定常(超声速)二维流动理论中所处的地位，与简单波在不定常一维流动中所处的地位是相同的. 鉴于这个类比关系，这种流动也称为**简单波**；特别是，对应于 $f_2\equiv 0$ 情形的稀疏波称为**中心简单波**.

像在不定常情形中一样，定常简单波最重要的特性之一是：在 xy 平面上，与均匀流区域邻接的任何区域内的流动都是简单波(参看 §97).

现在，我们来说明怎样才能求出对应于绕给定边线流动的简单波. 图 98 绘出所研究的边线；由点 O 向左，边线是直线，而向右

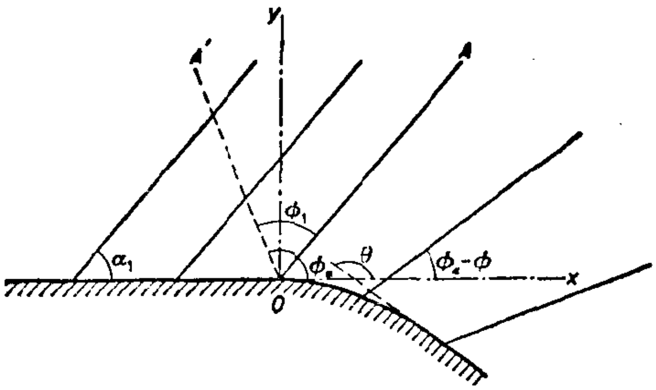


图 98

就开始弯曲. 当然，在超声速流动中，弯曲的效果是只向(由点O出发的)特征线OA的下游传播. 因此，这条特征线左边的流动是均匀流；我们用下标1表示对应于这个区域的量. 在这个区域内，所有的特征线都是相互平行的，它们与x轴的夹角等于马赫角$\alpha=\arcsin\frac{c_1}{v_1}$.

在公式(101.12)—(101.15)中，特征线的倾角ϕ是从$v=c=c_*$的那条线量起的. 这就是说(参看§104)，特征线OA的ϕ值应由下式给出：

$$\phi_1=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arccos\frac{c_1}{c_*},$$

而角ϕ是从OA'量起的(图98). 于是，特征线与x轴的夹角为$\phi_*-\phi$，这里$\phi_*=\alpha_1+\phi_1$. 根据公式(101.12)—(101.15)，速度和压力可用角ϕ表示如下：

$$v_x=v\cos\theta,\qquad v_y=v\sin\theta,\tag{107.2}$$

$$v^2=c_*^2\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\sin^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right),\tag{107.3}$$

$$\theta=\phi_*-\phi-\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right),\tag{107.4}$$

$$p=p_*\left(\cos\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\phi\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.\tag{107.5}$$

特征线方程可写为

$$y=x\operatorname{tg}(\phi_*-\phi)+F(\phi). \qquad (107.6)$$

当边线形状给定时，任意函数 $F(\phi)$ 可确定如下. 设边线方程为 $Y=Y(X)$，这里 X 和 Y 为边线上点的坐标. 在物面上，气体的速度是切向的，即

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{dY}{dX}. \qquad (107.7)$$

通过点 $(X、Y)$ 与 x 轴夹角为 $\phi_*-\phi$ 的直线方程为

$$y-Y=(x-X)\operatorname{tg}(\phi_*-\phi).$$

若令

$$F(\phi)=Y-X\operatorname{tg}(\phi_*-\phi), \qquad (107.8)$$

则上述方程与(107.6)式相同. 从所给定的方程 $Y=Y(X)$ 和方程(107.7)出发，可把边线表成参数方程 $X=X(\theta)$，$Y=Y(\theta)$ 的形式，其参数是边线切线的倾角 θ. 利用(107.4)那个以 ϕ 表示 θ 的表示式进行代换，得 X 和 Y 作为 ϕ 的函数；最后，把这两个关系式代入(107.8)，即得待求的函数 $F(\phi)$.

在绕凸曲面的流动中，速度矢量与 x 轴的夹角 θ 随着流向下游而减小(图98)，因而特征线与 x 轴的夹角 $\phi_*-\phi$ 也单调地减小(这里总是指由表面发出的特征线). 因此，(在这个流动区域内)特征线互不相交. 所以，在特征线 OA(它是弱间断线) 下游的区域中，我们得到连续的(无激波的)和越来越稀疏的流动.

在绕凹曲面的流动中，情况就不同了. 这时切线的倾角 θ 随着向下游而增加，因而特征线的倾角也逐渐增加. 于是，在这个流动区域中，特征线相交. 但在这些互不平行的不同特征线上，所有的量(速度、压力等)有不同的值. 这样一来，在特征线的交点上，所有的量就成为多值的了，这在物理上是不可能的. 在不定常的一维简单压缩波中(§94)，我们已经遇到类似的现象. 像在那种

情况下一样，这意味着实际上形成了激波. 由所讨论的解不能完全确定间断面的位置，因为这个解是在假定没有间断面的条件下求得的. 能够得到的唯一结果，是激波的起始位置(图 99 中的点 O，激波在图中用实线 OB 表示). 这是特征线的这样一个交点，过这个交点的流线最靠近物面. 在点 O 的下方(即更靠近物面)所通过的流线上，解处处是单值的；由点 O "开始"，它是多值的. 在一维不定常简单波中，已求得了用来确定形成间断面的时间和位置的方程组；采用和这相同的办法，可以求得用来确定点 O 的坐标 x_0, y_0 的方程组. 若把特征线的倾角看作是特征线上点坐标 (x, y) 的函数，则当 x 和 y 超过某定值 x_0, y_0 时，这个函数就变成多值的. 在 § 94 中，对于函数 $v(x, t)$ 情况是相同的，因而我们不必重复那里所作的分析过程，就可立即写出方程

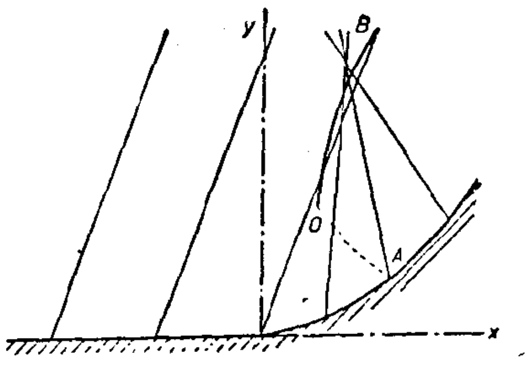


图 99

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)_x = 0, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2}\right)_x = 0. \tag{107.9}$$

由这两个方程可求出形成激波的位置. 从数学上讲，这个点就是直线特征线族包络线上的尖点(参看 § 96).

在绕凹曲面的流动中，在点 O 上方流过的各流线上，直到这些流线与激波相交以前，简单波都是存在的. 在点 O 下方通过的流线，则根本不与激波相交，但不能由此得出结论：这里所讨论的解在这些流线的所有点上都有效. 原因是激波对于沿这些流线流动的气体也会受扰动影响，因而这个流动与不存在激波时的流动是不同的. 但是，根据超声速流动的性质，这些扰动只能延及（第二族）特征线 OA 下游的气体，该特征线是由激波起始点 O 发出

的. 所以，所讨论的解对于 AOB 的左边是处处有效的. OA 本身是个弱间断线. 我们知道，在绕凹曲面的流动中，不可能有与绕凸曲面流动的简单稀疏波相对应的处处连续的(没有激波的)简单压缩波.

绕凹边线流动中所形成的激波，是激波在固壁以外气流内部一点“开始”的一个例子. 激波开始的点有某些一般特性，在这里可以说明一下. 在这点本身，激波的强度为零，而在这点邻近，强度很小. 但在弱激波中，熵和涡量的间断都是三阶小量，所以穿过激波流动各量的变化与连续等熵势流各量的变化只差三阶小量. 由此可知，在由激波开始点发出的弱间断线中，只有各个量的三阶导数才能发生间断. 一般说来，会有两个这样的间断线：一个是与特征线重合的弱间断线；另一个是与流线重合的切向弱间断线(参看 § 89 末).

§ 108. 恰普雷金方程：定常二维气体流动的一般问题

在论述定常简单波以后，现在来研究任意定常平面势流的一般问题. 我们假设流动是等熵的，而且不含有激波.

1902 年 C. A. 恰普雷金首先指出，可以把这个问题化成一个线性偏微分方程的求解问题. 这是通过变换，将自变量变换到新的独立变量即速度分量 v_x, v_y 来实现的. 这个变换通常称为**速度图变换**，v_xv_y 平面称为**速度平面**，而 xy 平面称为**物理平面**.

对于势流，欧拉方程可用它的初积分即伯努利方程

$$w+\frac{v^2}{2}=w_0 \tag{108.1}$$

来代替. 连续方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)=0. \tag{108.2}$$

关于速度势 ϕ 的微分，有 $d\phi=v_xdx+v_ydy$. 我们用勒让德变换，

从独立变量 x, y 变换到新的变量 v_x, v_y，因而有

$$d\phi = d(xv_x) - xdv_x + d(yv_y) - ydv_y,$$

引进函数

$$\Phi = -\phi + xv_x + yv_y, \tag{108.3}$$

则得

$$d\Phi = xdv_x + ydv_y.$$

这里把 Φ 看作 v_x 和 v_y 的函数. 因而有

$$x = \frac{\partial\Phi}{\partial v_x}, \quad y = \frac{\partial\Phi}{\partial v_y}. \tag{108.4}$$

但是，不用速度的笛卡儿分量，而用速度的大小 v 及其与 x 轴的夹角 θ，则更为方便：

$$v_x = v\cos\theta, \qquad v_y = v\sin\theta. \tag{108.5}$$

对导数作相应的变换，就给出

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\theta\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{\sin\theta}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \\ y &= \sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{\cos\theta}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{108.6}$$

而不是给出(108.4) 式. 势函数 ϕ 与函数 Φ 的关系由以下简单的公式表示：

$$\phi = -\Phi + v\frac{\partial\Phi}{\partial v}. \tag{108.7}$$

最后，为了求得用以确定函数 $\Phi(v, \theta)$ 的方程，必须把连续方程(108.2) 变换成用新的自变量来表示. 把导数写成雅可比行列式的形式：

$$\frac{\partial(\rho v_x, y)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(\rho v_y, x)}{\partial(x, y)} = 0.$$

上式乘以 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(v, \theta)}$，并将(108.5) 代入，我们得

$$\frac{\partial(\rho v\cos\theta, y)}{\partial(v,\theta)}-\frac{\partial(\rho v\sin\theta, x)}{\partial(v,\theta)}=0.$$

为了把这些雅可比行列式展开，必须用表达式(108.6)替换上式中的 x 和 y．此外，因为熵 s 是给定的常数，如果我们把密度表成 s 和w的函数，并用 $w=w_0-\frac{v^2}{2}$ 代入，则密度可写成仅仅是 v 的函数，即 $\rho=\rho(v)$．因此，经过简单计算以后，便得方程

$$\frac{d(\rho v)}{dv}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\frac{1}{v}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right)+\rho v\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=0.$$

根据(80.5)式：

$$\frac{d(\rho v)}{dv}=\rho\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right),$$

于是最后求得函数$\Phi(v,\theta)$的恰普雷金方程：

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{v^2}{1-v^2/c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}+v\frac{\partial\Phi}{\partial v}=0. \qquad (108.8)$$

这里声速是个已知函数 $c(v)$，它由气体的状态方程和伯努利方程共同确定.

方程(108.8)加上关系式(108.6)，是与运动方程等价的．于是，求解非线性运动方程的问题就化成求解函数$\Phi(v,\theta)$的线性方程的问题.当然，这个方程的边界条件是非线性的.这些条件如下：在物面上，气体的速度必须是切向的．我们用参数形式

$$X=X(\theta), Y=Y(\theta)$$

表示物面方程(如§107中那样)，并用 X，Y 替换(108.6)中的 x 和 y，就得到两个方程，它们必为所有的 θ 值所满足；这并非对每个函数$\Phi(v,\theta)$都是可能的．事实上，边界条件要求：对于所有的θ，这两个方程是共容的，即其中的一个方程一定能由另一个推导出来.

不过，满足这个边界条件，并不能保证所得到的恰普雷金方程

的解，可以确定物理平面上处处都有实际可能的流动. 还必须满足以下条件，即雅可比行列式 $\Delta\equiv\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,\theta)}$ 必须处处都不为零，除了它所有的四个导数都为零的平凡情形以外. 不难看出：如果这个条件得不到满足，则当通过 xy 平面中由方程 $\Delta=0$ 确定的线(称为极限线)时，这个解变成复数①. 因为，设 $v=v_0(\theta)$ 线上 $\Delta=0$，并假定 $\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)_v\neq0$，则有

$$-\Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_v=\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,\theta)}\frac{\partial(v,\theta)}{\partial(v,y)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(v,y)}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_y=0.$$

由此可知，在极限线邻近，由方程

$$x-x_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_y(v-v_0)^2,$$

可将 v 表示成 x 的函数(对给定的 y)，在极限线的一边或另一边，v 变成复数②.

不难看出，极限线只能在超声速流动区域中出现. 利用关系式(108.6)和方程(108.8)直接计算，得出

$$\Delta=\frac{1}{v}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial v}-\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2+\frac{v^2}{1-v^2/c^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)^2\right].\quad(108.9)$$

显然，当 $v\leqslant c$ 时，$\Delta>0$；因此，只有当 $v>c$ 时，Δ 才可能变成零.

在恰普雷金方程的解中出现极限线这一事实表明，在所给的条件下，整个区域内均为连续流动是不可能的，而是必然出现激波. 但应强调指出，这些激波的位置是与极限线的位置不同的.

---

① 通过 Δ 为无穷大的点，这并无妨碍. 若在某条线上 $\frac{1}{\Delta}=0$，则这仅仅意味着 xy 平面和 $v\theta$ 平面不再是一一对应的关系，即在 xy 平面上移动一次时，就会通过 $v\theta$ 平面的某些部分两次或三次.

② 即使 $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)_y$ 随 Δ 一起变为零，但当 $v=v_0$ 时，$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_y$ 仍然变号，即差值 $x-x_0$ 与 $v-v_0$ 的更高偶次幂成正比，则这个结果显然还是正确的.

在§107中，我们讨论了定常二维超声速流动的特殊情形（简单波），其特征是流动速度的大小只是它的方向的函数：$v=v(\theta)$. 这个解不能由恰普雷金方程得到，因为$\frac{1}{\Delta}\equiv 0$，于是，当用向速度平面变换时的雅可比行列式Δ乘连续方程时，这个解就被“丢失”了. 这个情况与不定常一维流动理论中所得到的情况完全相似. 在§98中，关于简单波与方程(98.2)的通积分之间关系所作的说明，对定常简单波与恰普雷金方程的通积分之间的关系也是完全适用的.

在亚声速流动中，雅可比行列式Δ是正值，这使我们能够证明一个有趣的定理，这个定理是A. A. 尼科里斯基和Г. И. 塔甘诺夫于1946年给出的. 我们有恒等式

$$\frac{1}{\Delta}\equiv\frac{\partial(\theta,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(\theta,v)}{\partial(x,v)}\frac{\partial(x,v)}{\partial(x,y)},$$

或

$$\frac{1}{\Delta}=\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_v\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x. \tag{108.10}$$

在亚声速流动中，$\Delta>0$，因而我们知道导数$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_v$和$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x$同号. 这个结论有一个简单的几何意义：如果沿曲线$v=$常数$\equiv v_0$移动，使区域$v<v_0$在其右边，则角$\theta$单调递增，即速度矢量总是沿反时针方向转动. 特别是，这个结果适用于亚声速流和超声速流之间的过渡线，，在这个线上，$v=c=c_*$.

最后，写出用v表示c的显函数式，我们可以给出理想气体的恰普雷金方程：

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+v^2\frac{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{v^2}{c_*^2}}{1-\frac{v^2}{c_*^2}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}+v\frac{\partial\Phi}{\partial v}=0. \tag{108.11}$$

这个方程有一族可用超几何函数表示的特解①.

§ 109. 定常二维流动中的特征线

在 § 79 中，已经讨论过定常(超声速) 二维流动中特征线的某些一般性质. 现在，我们来推导用运动方程的给定解表示的特征线的方程.

在定常二维超声速流动中，一般有三族特征线. 除了熵和涡量的小扰动以外，所有的小扰动都是沿着其中的两族(称为特征线 C_+ 和 C_-)传播的；熵和涡量的扰动是沿第三族特征线 (C_0) 传播的，这第三族特征线与流线重合. 对于给定的流动而言，流线是已知的，因而问题就是要确定属于前面两族的特征线.

通过平面中每一点的特征线 C_+ 和 C_- 的方向，落在通过该点流线的两侧，它们与流线的夹角等于当地马赫角 α 的值(§ 79，图 41). 我们用 m_0 表示在一给定点上流线的斜率，而用 m_+，m_- 分别表示特征线 C_+，C_- 的斜率. 于是有

$$\frac{m_+ - m_0}{1+m_0 m_+} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \frac{m_- - m_0}{1+m_0 m_-} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

由此得

$$m_\pm = \frac{m_0 \pm \operatorname{tg}\alpha}{1 \mp m_0 \operatorname{tg}\alpha};$$

所有上面的符号都是对应于 C_+ 的，而下面的符号则是对应于 C_- 的. 用 $m_0 = \frac{v_y}{v_x}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}$ 代入，并进行化简，我们得到特征线斜率的下列表达式：

$$m_\pm \equiv \left(\frac{dy}{dx}\right)_\pm = \frac{v_x v_y \pm c\sqrt{v^2 - c^2}}{v_x^2 - c^2}. \qquad (109.1)$$

---

① 例如，参看 L. I. Sedov, *Two-dimensional Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics*, Moscow, 1950(俄文原本: Л. И. Седов, *Плоские Задачи Гидродинамики и Аэродинамики*, Гостехиздат, 1959).

若速度分布已知，则这个方程就是确定特征线C_+和C_-的微分方程①.

除了xy平面上的特征线以外，还可研究速度平面上的特征线，这在研究等熵势流时是特别有用的；我们在下面就要讨论这种情形. 从数学上讲，当$v>c$时，恰普雷金方程(108.8)是双曲型的，而速度平面上的这些特征线就是该方程的特征线. 按照数学物理中常用的一般方法(参看§96)，由这些系数即可得出特征线的方程：

$$dv^2+\frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}d\theta^2=0,$$

或

$$\left(\frac{d\theta}{dv}\right)_{\pm}=\pm\frac{1}{v}\sqrt{\frac{v^2}{c^2}-1}. \qquad (109.2)$$

由这个方程给出的特征线，并不依赖于所研究的恰普雷金方程的具体解，因为该方程的系数与Φ无关. 速度平面中的特征线是物理平面上特征线C_+和C_-变换的结果，所以，我们分别称它们为特征线Γ_+和Γ_-，以使它们与(109.2)中的符号一致.

方程(109.2)的积分给出形式$J_+(v,\theta)=$常数和$J_-(v,\theta)=$常数的关系式. 函数J_+和J_-是沿特征线C_+和C_-保持不变的量(即黎曼不变量). 对于理想气体，方程(109.2)可以积分成显式. 但是，用不着再作具体计算，因为由公式(107.3)和(107.4)就可看出这个结果. 事实上，根据简单波的一般性质(参看§97)，简单波中v对θ的依赖关系可由黎曼不变量之一在全空间为常数这一条件给出. 公式(107.3)和(107.4)中的任意常数是ϕ_*；从这些公式

① 若方程(109.1)中的v_y和y用v_r和r替换，则该方程还可确定定常轴对称流动的特征线，这里，r是柱坐标(到对称轴，即x轴的距离)；如果我们设想用通过对称轴的xr平面代替xy平面，显然，以上的推导没有什么变化.

中消去参数ϕ，便得

$$J_{\pm}=\theta\pm\left[\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma+1)\left(1-\frac{c_*^2}{v^2}\right)}\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-1)\left(\frac{v^2}{c_*^2}-1\right)}\right]. \qquad (109.3)$$

速度平面中的特征线是一族外摆线，它占据半径为$v=c_*$和$v=\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}c_*$的两个圆之间的区域(图(100).

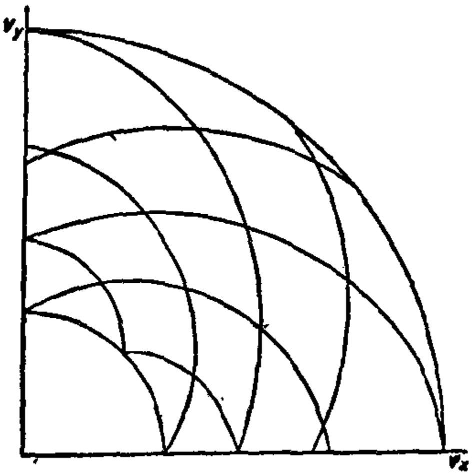


图 100

对于等熵势流，特征线Γ_+，Γ_-有以下的重要性质：特征线族Γ_+，Γ_-分别与特征线族C_-，C_+正交（假设图中的坐标轴x和y与坐标轴v_x，v_y是互相平行的）①.

为证明这点，我们从二维势流方程(106.3)出发，该方程的形式为

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0, \qquad (109.4)$$

该式没有自由项. 特征线$C_\pm$的斜率$m_\pm$是二次方程

$$Am^2-2Bm+C=0$$

的两个根. 我们来考虑表达式$dv_x^+dx^-+dv_y^+dy^-$，其中速度微分是沿特征线Γ_+取的，而坐标微分则是沿C_-取的. 我们有如下恒等式:

$$dv_x^+dx^-+dv_y^+dy^-$$
$$=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dx^+dx^-+\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(dx^+dy^-+dx^-dy^+)+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}dy^+dy^-.$$

① 这对xr平面中轴对称流动的特征线是不适用的.

将上式除以 dx^+dx^-，我们分别得到$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$的系数为

$$m_+ + m_- = \frac{2B}{A} \text{和} \ m_+ m_- = \frac{C}{A},$$

按照(109.4)，显然，以上表达式为零. 这样，便得

$$dv_x^+ dx^- + dv_y^- dy^- = d\boldsymbol{v}^+ \cdot d\boldsymbol{r}^- = 0.$$

用类似方法又得

$$d\boldsymbol{v}^- \cdot d\boldsymbol{r}^+ = 0.$$

这些方程与前面所述的结论是等价的.

§ 110. 欧拉-特里科米方程. 跨声速流动

研究由亚声速流动过渡到超声速流动及其相反过程所引起的流动特点，具有基本的意义. 出现这种过渡的定常流动称为混合流动或**跨声速流动**，而发生过渡的界面称为**过渡面**或**声速面**.

在研究过渡区附近的流动时，恰普雷金方程是特别有用的，因为该方程在这里大为简化. 在发生过渡的边界上，$v=c=c_*$，而在边界附近(跨声速区)，差值 $v-c$ 和 $v-c_*$ 很小，它们之间的关系以式(106.8)表明：

$$\frac{v}{c}-1=\alpha_*\left(\frac{v}{c^*}-1\right).$$

现在对恰普雷金方程进行相应的简化. 方程(108.8) 中的第三项与第二项相比是个小量，第二项的分母中含有$1-\frac{v^2}{c^2}$. 第二项可近似地写为

$$\frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{c_*^2}{2\left(1-\frac{v}{c}\right)} = \frac{c_*}{2\alpha_*\left(1-\frac{v}{c_*}\right)}.$$

最后，用新的变量 η 代替速度 v：

$$\eta=(2\alpha_*)^{1/3}\frac{v-c_*}{c_*}, \tag{110.1}$$

即得如下形式的待求方程：

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}-\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=0. \tag{110.2}$$

在数学物理中，这种形式的方程称为**欧拉-特里科米方程**①. 在 $\eta>0$ 的半平面中，它是双曲型的；而在 $\eta<0$ 的半平面中是椭圆型的. 这里，我们要讨论这个方程的某些数学性质，这些性质在有关的各种物理问题中是重要的.

方程(110.2) 的特征线由方程 $\eta d\eta^2-d\theta^2=0$ 给出，这个方程的通积分为

$$\theta\pm\frac{2}{3}\eta^{\frac{3}{2}}=C, \tag{110.3}$$

式中，C 为任意常数. 这个方程代表 $\eta\theta$ 平面上的两族曲线，它们是右半平面中半三次抛物线的两个分支，其尖点在 θ 轴上 (图 101).

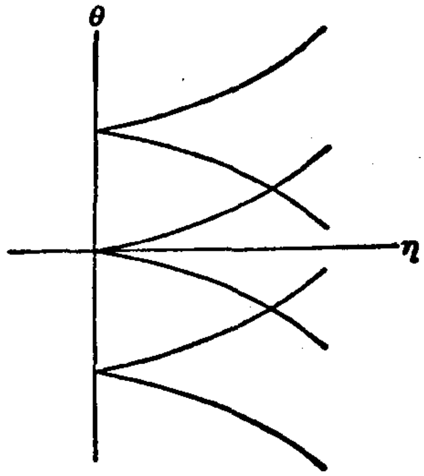


图 101

在研究空间中一个小范围内② 的流动时，若这小范围内气体速度的方向只有微小的变化，则我们总可以取 x 轴沿这样的方向，使在所讨论的整个区域内，从 x 轴量起的 θ 角都是小量. 这时，用函数 $\Phi(\eta,\theta)$ 确定坐标 x, y 的方程(108.6)也大为简化③，即

① 把这个问题用于这里所研究的问题的是 Ф.И. 弗兰克尔(1945). 方程(110.2)的数学理论是 F. 特里科米在《混合型线性方程》一书中给出的. 参看 F. Tricomi, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto, Memorie della Reale Accademia. Nazionale dei Lincei, Classe di scienze fisiche*, Ser. 5, **14**, 133, 1922.

② 当然，这个短语不能从字面上理解，所讨论的区域可以是无穷远点的附近区域，即离物体很远的区域.

③ 我们在等式右边省略了因子 $1/c_*$，这只是意味着用 $c_*\Phi$ 代替 Φ，而对方程(110.2)没有影响，所以，这种省略总是允许的.

$$x=(2\alpha_*)^{1/3}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta},\qquad y=\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}.$$

为了避免出现因子$(2\alpha_*)^{1/3}$，我们用$x(2\alpha_*)^{-\frac{1}{3}}$代替坐标$x$,并仍把$x(2\alpha_*)^{-\frac{1}{3}}$叫做$x$,则有

$$x=\frac{\partial\Phi}{\partial\eta},\qquad y=\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}. \tag{110.4}$$

值得注意的是,因为y与Φ的关系这么简单,所以函数$y(\eta,\theta)$(而不是$x(\eta,\theta)$)也满足欧拉-特里科米方程. 利用这一事实,我们可以把从物理平面转换到速度平面的雅可比行列式写为

$$\Delta=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\eta)}=\Phi^2_{\eta\theta}-\Phi_{\eta\eta}\Phi_{\theta\theta}=\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2-\eta\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2. \tag{110.5}$$

以前指出过，欧拉-特里科米方程通常用来研究$\eta\theta$平面上原点附近范围内解的性质. 在有实际意义的情况下，原点就是解的奇点. 由于这个原因,所以具有某种齐次性的欧拉-特里科米方程的特殊积分族就特别受到重视. 这些解,对变量θ^2和η^3而言是齐次的;这样的解一定存在,因为$\theta^2\to a\theta^2$，$\eta^3\to a\eta^3$这两个变换使方程(110.2)保持不变. 我们将寻求以下形式的解:

$$\Phi=\theta^{2k}f(\xi),\qquad \xi=1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2},$$

这里k是常数，也就是在所作变换下齐次函数Φ的次数. 我们曾这样取变量ξ,使得它在通过点$\eta=\theta=0$的特征线上等于零. 进行上述代换,便得函数$f(\xi)$的方程:

$$\xi(1-\xi)f''+\left[\frac{5}{6}-2k-\xi\left(\frac{3}{2}-2k\right)\right]f'-k\left(k-\frac{1}{2}\right)f=0,$$

这是一个超几何方程. 利用超几何方程两个独立积分的熟知表达式,我们得到所要求的解$\left(2k+\frac{1}{6}\text{为非整数的情形}\right)$:

$$\Phi_k=\theta^{2k}\left[AF\left(-k,-k+\frac{1}{2};\ -2k+\frac{5}{6};1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right.$$

$$+B\left(1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{2k+\frac{1}{6}}F\left(k+\frac{1}{6},k+\frac{2}{3};2k+\frac{7}{6};\right.$$

$$\left.\left.1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right]. \qquad (110.6)$$

利用自变量为 z, $\frac{1}{z}$, $1-z$, $\frac{1}{1-z}$和$\frac{z}{1-z}$的超几何函数之间的关系，也可以把这个解写成其它五种形式，在各种不同的问题中，这几种形式都会用到．下面给出其中的两种：

$$\Phi_k=\theta^{2k}\left[AF\left(-k,\ -k+\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right.$$

$$\left.+B\frac{\eta}{\theta^{2/3}}F\left(-k+\frac{1}{3},-k+\frac{5}{6};\frac{4}{3};\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\right], \qquad (110.7)$$

$$\Phi_k=\eta^{3k}\left[AF\left(-k,-k+\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{9\theta^2}{4\eta^3}\right)\right.$$

$$\left.+B\frac{\theta}{\eta^{3/2}}F\left(-k+\frac{1}{2},-k+\frac{5}{6};\frac{3}{2};\frac{9\theta^2}{4\eta^3}\right)\right]. \qquad (110.8)$$

当然，公式(110.6)—(110.8)中的常数A和B都是各不相同的．由这些表达式可以立即得出函数Φ_k的下列重要性质：线$\eta=0$和$\theta=0$不是奇异线[由(110.7)看出，在$\eta=0$邻近，Φ_k可按η的整数次幂展开，再由(110.8)，它同样可按θ展开]，关于这一点，由(110.6)是不能明显看出的．另一方面，由表达式(110.6)可知，特征线是欧拉-特里科米方程的一般(即包含A和B两个常数)齐次积分Φ_k的奇异线：若$2k+\frac{1}{6}$不是整数，则因子$(9\theta^2-4\eta^3)^{2k+\frac{1}{6}}$有支点，而若$2k+\frac{1}{6}$是整数，则(110.6)的一项就没有意义①（或者，若$2k+\frac{1}{6}=0$，它退化成另一项)，而必须由超几何方程的第二个独立解所代替；在这种情况下，这第二个独立解有对数奇性．

在含有不同k值的各个积分Φ_k之间保持有下列关系：

① 我们记得，当$\gamma=0,-1,-2,\cdots$时，级数$F(\alpha,\beta,\gamma;z)$没有意义．

$$\Phi_k=\Phi_{-k-\frac{1}{6}}(9\theta^2-4\eta^3)^{2k+\frac{1}{6}},\tag{110.9}$$

$$\Phi_{k-\frac{1}{2}}=\frac{\partial\Phi_k}{\partial\theta}.\tag{110.10}$$

第一个式子直接来自(110.6)，而第二个式子则是由于$\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial\theta}$满足欧拉-特里科米方程，并且它的齐次次数是 $\Phi_{k-\frac{1}{2}}$的齐次次数. 当然，在这些公式中，Φ_k 都是指带有两个任意常数的一般表达式.

在研究点 $\eta=\theta=0$ 邻近的解时，我们必须了解沿着围绕该点周线上解的变化. 例如，令函数 (110.6) 中的 Φ_k 代表特征线 $\theta=\dfrac{2}{3}\eta^{3/2}$ 邻近点A处的解(图 102)，并假设我们需要求出特征线

$\theta=-\dfrac{2}{3}\eta^{3/2}$ 邻近 (点B处)解的形式.

从A到B的路径穿过横坐标轴，且$\theta=0$是表达式(110.6)中超几何函数这样的奇异线，使得它们的自变量在该线上为无穷大. 因此，为了要从A移到B，必须把超几何函数变换为自变量倒数

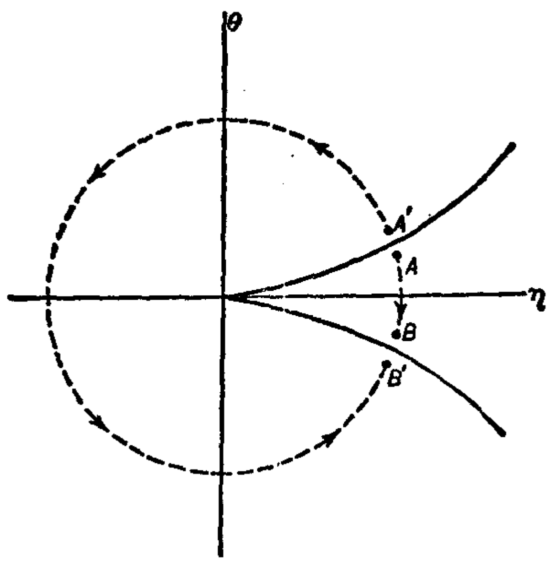


图 102

$\dfrac{9\theta^2}{9\theta^2-4\eta^3}$的函数，这样，$\theta=0$就不是奇异线了，然后改变 θ 的符号，最后通过反变换回到原来的自变量. 用这种方法，我们求得(110.6)中各个函数的下列变换公式:

$$\left.\begin{aligned}
F_1 \to & \frac{F_1}{2\sin\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi} \\
& +F_2\cdot 2^{-4k-\frac{1}{3}}\frac{\Gamma\left(-2k-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(-2k+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(-2k)\,\Gamma\left(-2k+\frac{2}{3}\right)}, \\
F_2 \to & \frac{-F_2}{2\sin\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi} \\
& +F_1\cdot 2^{4k+\frac{1}{3}}\frac{\Gamma\left(2k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k+1)\,\Gamma\left(2k+\frac{1}{3}\right)},
\end{aligned}\right\} \quad (110.11)$$

这里 F_1 和 F_2 表示:

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &= |\theta|^{2k}F\left(-k,-k+\frac{1}{2};-2k+\frac{5}{6};1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right), \\
F_2 &= |\theta|^{2k}\left|1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right|^{2k+\frac{1}{6}} \\
&\cdot F\left(k+\frac{1}{6},k+\frac{2}{3};2k+\frac{7}{6};1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (110.12)$$

在超几何函数的系数中，上式的 θ 和$1-\dfrac{4\eta^3}{9\theta^2}$取绝对值.

用类似的方法，我们可以求得绕原点按相反方向路经从 A' 到 B'(图 102) 的变换公式. 这时计算更为复杂，因为必须通过超几何函数的三个奇点($\theta=0$ 的一点，$\eta=0$ 的两点；我们知道，自变量为 z 的超几何函数的奇点为 $z=1$ 和 $z=\infty$). 最后的公式为

$$
\left.\begin{aligned}
F_1 \to & -\frac{\sin\left(4k-\frac{1}{6}\right)\pi}{\sin\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi} F_1 + F_2 \cdot 2^{-4k+\frac{2}{3}} \\
& \cdot \cos\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi \frac{\Gamma\left(-2k-\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(-2k+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(-2k)\Gamma\left(-2k+\frac{2}{3}\right)}, \\
F_2 \to & \frac{\sin\left(4k-\frac{1}{6}\right)\pi}{\sin\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi} F_2 + F_1 \cdot 2^{4k+\frac{4}{3}} \\
& \cdot \cos\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi \frac{\Gamma\left(2k+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(2k+\frac{7}{6}\right)}{\Gamma(2k+1)\Gamma\left(2k+\frac{1}{3}\right)}.
\end{aligned}\right\} \quad (110.13)
$$

当然,除了这族齐次解以外,欧拉-特里科米方程还有其它的特解族. 这里,我们要提一下,按 θ 的傅里叶展开式而得到的一族解. 如果我们寻求下列形式的 Φ,即

$$
\Phi_\nu = g_\nu(\eta) e^{\pm i\nu\theta}, \tag{110.14}
$$

式中,ν 是任意常数,则我们得函数 g_ν 的方程: $g_\nu'' + \nu^2 \eta g_\nu = 0$. 这是亚里函数方程;其通积分为

$$
g_\nu(\eta) = \sqrt{\eta}\; Z_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\nu\eta^{3/2}\right), \tag{110.15}
$$

式中,$Z_{\frac{1}{3}}$为$\frac{1}{3}$阶贝塞尔函数的任意线性组合.

最后,记住欧拉-特里科米方程的通积分也可写为

$$
\Phi = \int_{C_z} f(\zeta)\, dz, \quad \zeta = z^3 - 3\eta z + 3\theta, \tag{110.16}
$$

式中,$f(\zeta)$ 是个任意函数,而积分路线可取复平面 z 中任意曲线 C_z,在 C_z 的两端,导数 $f'(\zeta)$的值相等. 事实上,把(110.16)直接

代入欧拉-特里科米方程，得

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}-\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=9\int_{C_z}(z^2-\eta^2)f''(\zeta)dz$$

$$=3\int_{C_\zeta}f''(\zeta)d\zeta=3[f'(\zeta)]_{C_\zeta}=0,$$

即方程得到满足.

§111. 在声速面非奇点附近，欧拉-特里科米方程的解

现在，我们来进一步弄清，什么样的解 Φ_k 对应于过渡线附近气流没有物理奇点(弱间断线或激波)的情形. 为此，比较方便的办法，是不从欧拉-特里科米方程本身出发，而从物理平面上的势函数方程出发. §106 中已经导出这个方程；对于二维流动，利用代换 $x\to x(2\alpha_*)^{1/3}$，方程(106.10)变为

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}. \tag{111.1}$$

我们记得，这个方程中的势函数 ϕ 是这样定义的，即速度要根据方程

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\eta,\qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}=\theta, \tag{111.2}$$

由 ϕ 对坐标的导数给出. 我们还可指出，通过勒让德变换

$$\Phi=-\phi+x\eta+y\theta,\text{或}$$

$$\phi=-\Phi+\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}+\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}. \tag{111.3}$$

将自变量变为 θ,η，则欧拉-特里科米方程即可由方程 (111.1)直接导出.

我们来研究某过渡线邻近的流动，可将过渡线上的一点取为 xy 平面上的原点，并将 ϕ 按 x 和 y 的幂次展开. 在一般的情况下，满足方程(111.1)的展开式的第一项为

$$\phi = \frac{xy}{a}. \tag{111.4}$$

这里，$\theta = \frac{x}{a}$，$\eta = \frac{y}{a}$，所以

$$\Phi = a\theta\eta. \tag{111.5}$$

显然，由这个函数的齐次次数，可知它对应于函数 $\Phi_{\frac{5}{6}}$ 中的一个；这是表达式(110.7)的第二项，其中 $k = \frac{5}{6}$ 的超几何函数简化为1：

$$\eta\theta F\left(-\frac{1}{2}, 0; \frac{4}{5}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) = \eta\theta.$$

如果我们希望得到物理平面上过渡曲线的方程，则仅有表达式的第一项是不够的．下一项的次数为1，就是说，它对应于函数 Φ_1 中的一个，即表达式(110.7)中的第一项，当 $k=1$ 时，它化为多项式：

$$\theta^2 F\left(-1, -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right) = \theta^2 + \frac{1}{3}\eta^3.$$

于是，Φ 展开式的前两项为

$$\Phi = a\eta\theta + b\left(\theta^2 + \frac{1}{3}\eta^3\right). \tag{111.6}$$

由此，

$$\left.\begin{aligned} x &= a\theta + b\eta^2, \\ y &= a\eta + 2b\theta. \end{aligned}\right\} \tag{111.7}$$

过渡曲线($\eta = 0$)就是直线 $y = \frac{2b}{a}x$.

为了求得物理平面上的特征线方程，我们只需展开式的第一项．将 $\theta = x/a$，$\eta = y/a$ 代入速度平面的特征线方程 $\theta = \pm\frac{2}{3}\eta^{3/2}$，我们得 $x = \pm\frac{2}{3\sqrt{a}}y^{3/2}$，即也是两支半三次抛物线，其尖点在过渡曲线上．从下面的简单论证，也可明显地看出特征线的这个性质．

在过渡曲线的各点上，马赫角是$\frac{1}{2}\pi$. 这表示两族特征线的切线相重合，所以有个尖点（图 103）. 流线在与特征线垂直的情况下与过渡曲线相交，在这里根本没有奇点.

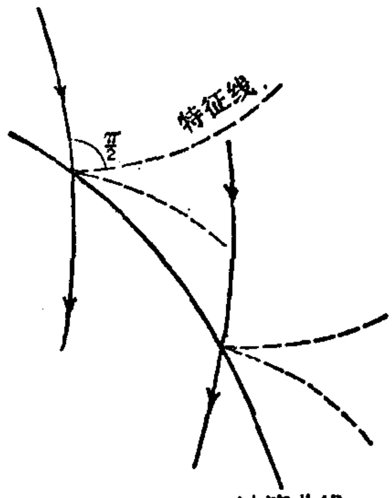


图 103

有个特殊情形，即在流线与过渡曲线正交的点上，解(111.6)是不适用的①. 在这样的点邻近，显然流动是对称于x轴的. 这种情况需要进行专门研究，Ф. И. 弗兰克尔和C. B法里科维奇(1945)已经研究过这个问题.

流动的对称性是指：如果改变y的符号，则速度v_y变号，而v_x保持不变. 这就是说，势函数ϕ必定是y的偶函数，而势函数Φ是θ的偶函数. 因此，在这种情况下，ϕ展开式的前几项有以下形式:

$$\phi=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}a^2xy^2+\frac{1}{24}a^3y^4; \qquad (111.8)$$

小量x和y的相对量级预先是未知的，所以这三项有可能都是同一量级的. 由此，我们得到下列从物理平面到速度平面的变换公式:

$$\left.\begin{aligned}\eta&=ax+\frac{1}{2}a^2y^2,\\ \theta&=a^2xy+\frac{1}{6}a^3y^3.\end{aligned}\right\} \qquad (111.9)$$

这两个方程中的x和y不需解出显式，我们就能够容易地看出，函

① 这对应于(111.6)中$a=0$的情形；因为在曲线$\eta=0$上雅可比行列式Δ变为零，所以这个解就不适用了.

数 $y(\theta,\eta)$ 的齐次次数是$\frac{1}{6}$. 于是对应的函数 Φ 有$k=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$, 也就是说,这是通积分 $\Phi_{\frac{2}{3}}$的一个特殊情形.

从方程(111.9)中消去 x,我们得到函数 $y(\theta,\eta)$ 的三次方程:

$$(ay)^3-3\eta ay+3\theta=0. \tag{111.10}$$

$9\theta^2-4\eta^3>0$ 时,即在速度图上通过点 $\eta=\theta=0$ 的特征线左边的整个区域内(包括$\eta<0$ 的整个亚声速区域,图 104),这个方程只有一个实根,它必须是函数 $y(\theta,\eta)$. 在特征线右边的区域内, 三个根都是实根,我们必须取这样一个根,即此根必须是左边区域实根的延拓.

将表达式(111.9)代入方程 $4\eta^3=9\theta^2$,即得物理平面上的特征线(它通过原点). 由此得出两支抛物线:

$$\left.\begin{aligned}&\text{特征线 23 和 56:}\quad x=-\frac{1}{4}ay^2,\\&\text{特征线 34 和 45:}\quad x=\frac{1}{2}ay^2.\end{aligned}\right\} \tag{111.11}$$

上面的数字表示所指的特征线在物理平面上划分的是哪两个区域. 过渡曲线 (在速度平面中是$\eta=0$) 在物理平面上是抛物线 $x=-\frac{a}{2}y^2$(图 104). 我们可以指出过渡曲线与对称轴的交点的性质如下:从这点发出四支特征线, 而在过渡曲线的其它任何点上, 只发出两支特征线.

图 104 中用相应的数字标出了对应于物理平面上各个区域的速度平面区域. 这不是一一对应的关系①; 在物理平面上绕原点移动一周以后,速度平面上两条特征线之间的区域就被通过三次,

① 这与以下事实是一致的,即在物理平面上的特征线$x=\frac{1}{2}ay^2$ 上,$\Delta=\infty$; 参看§108 的第一个脚注.

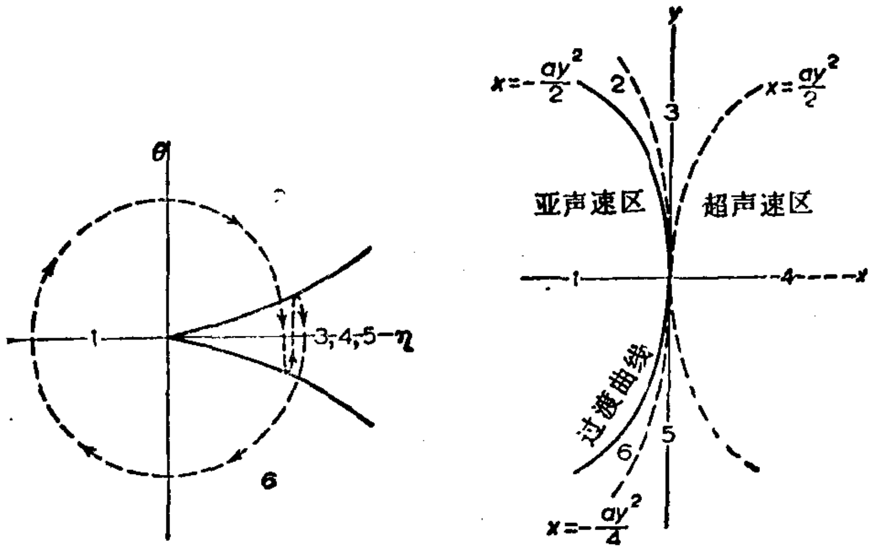


图 104

如图 104 的虚线所示，该虚线从特征线上"反射"了两次.

因为函数 $y(\theta、\eta)$ 本身是满足欧拉-特里科米方程的，所以，由通积分 $\Phi_{\frac{1}{6}}$ 一定可以求得函数 y. 在物理平面上特征线 23 邻近，这个函数是

$$y=\frac{2}{a}\left(\frac{3\theta}{2}\right)^{1/3}F\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{3};\frac{1}{2};1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)^{①};\qquad(111.12)$$

这就是(110.6)的第一项，在特征线 23 上没有奇点. 将此函数解析延拓到特征线 56 的邻域（所取路径通过亚声速区 1，即利用公式(110.13)），在那里，我们得到同样的函数. 但是，在特征线 34 和 45 邻近，$y(\theta,\eta)$ 由该函数与下列函数

$$\theta^{1/3}\sqrt{\frac{4\eta^3}{9\theta^2}-1}\,F\left(\frac{1}{3},\frac{5}{6};\frac{3}{2};1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right)\qquad(111.13)$$

的线性组合给出，这后一函数就是(110.6)的第二项. 这些线性组合可利用公式(110.11)进行解析延拓而得到；这里应记住，每从速度平面的特征线上"反射"一次，(111.13) 中的平方根就要改变

---

① 原文中，函数 F 前面的系数是 $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3\theta}{2}}$，疑有笔误. ——中译者注

符号.

从数学上讲，这些结果表明，函数 $\Phi_{\frac{1}{6}}$ 是三次方程

$$f^3-3\eta f+3\theta=0 \tag{111.14}$$

的诸根的线性组合，就是说，它们是代数函数①. 除 $\Phi_{\frac{1}{6}}$ 以外，对应于

$$k=\frac{1}{6}\pm\frac{1}{2}n,\ n=0,1,2,\cdots \tag{111.15}$$

的所有 Φ_k 都化为代数函数；它们是按公式(110.9)和(110.10)从 $\Phi_{\frac{1}{6}}$ 通过逐次微分求得的，Ф. И. 弗兰克尔(1947)指出了这一事实.

对应于

$$k=\pm\frac{1}{2}n,\ k=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{2}n \tag{111.16}$$

的函数 Φ_k 也化成代数函数，这些 Φ_k 中的超几何函数化为多项式②，例如，当 $k=\frac{1}{2}n$ 时，得表达式(110.6)的第一项；而 $k=-\frac{1}{2}n$ 时，得该式第二项.

特别是，这三族代数函数 Φ_k 包括了所有可能对应于物理平面上无奇点流动的势函数 Φ. 在这样的流动中，在过渡曲线上非对称点邻近，Φ 的展开式中所有的项(其中前两项由公式(111.6)给出)必定对应于

$$k=\frac{5}{6}+\frac{1}{2}n,\qquad 或\qquad k=1+\frac{1}{2}n.$$

但是，在对称点邻近，开始一项是 $k=\frac{2}{3}$ 的 Φ 的展开式也可能包括

①按卡丹公式由(111.14)求出的这些函数的显式，在实际上不便于使用.

② 应当记住，如果 α(或 β)满足关系式 $\alpha=-n$，或 $\gamma-\alpha=-n$，则 $F(\alpha;\beta;\gamma;z)$化为多项式.

$k=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}n$ 的函数.

§ 112. 声速绕流

恰普雷金方程的简化形式(即欧拉-特里科米方程) 在研究绕物体定常流动的气体动力学中具有重要意义，因为，必须用它来研究这种流动的基本的定性特征. 在这些问题中，首先是有关激波形成的问题. 例如，若激波是在亚声速流动中(在邻接物面的局部超声速区①)形成的，则它一定在离物体有限的距离处终止，因而产生了激波终止点性质的问题(参看 § 113). 另一个类似的问题，是刚形成的激波在它与物面交点附近的性质问题. 在这两种情况下，都是弱激波，就是说，它是在跨声速区，因而必须用欧拉-特里科米方程进行研究②.

这里，我们要讨论另一个重要的理论问题，即来流的速度正好等于声速时，绕物体的定常二维流动的性质问题. 特别是，我们将知道，这时激波一定是从物面延伸到无穷远处. 由此，我们可以得出重要结论：激波开始出现时，马赫数 M_∞肯定是小于 1 的.

为此，我们考虑绕任意截面(不必对称)的无限展长物体 ("机翼")的二维流动. 这里，我们感兴趣的是在离物体的距离远大于物体尺度处的流动图象. 为方便起见，我们先阐述定性结果，然后讲定量计算.

在图 105 中，AB 和 $A'B'$ 是过渡曲线，所以，亚声速区位于它们的左边 (上游)；箭头表示来流的方向，我们就取这个方向为 x 轴，取靠近物体的任意一点为原点. 在离过渡曲线一定距离的地

---

① 当任何一点局部马赫数M的值超过 1 时，$M_\infty<1$ 的最小来流马赫数有时称为临界马赫数.

② 应当记住，在弱激波中，熵和涡量的变化量都是高阶小量，所以，在一级近似情况下，我们可以假设在间断面两边均为等熵势流.

方，有从物面发出的激波(图 105 中的 EF 和 $E'F'$). 可以看出，从物面上发出的特征线(介于过渡曲线和激波之间的区域内)可分成两组. 第一组特征线与过渡曲线相遇，并在这里终止(就是说，从过渡曲线上"反射"回来，作为特征线而到达物面；图 105 中画出了一条这样的特征线). 第二组特征线在激波上终止. 这两组特征线由极限特征线隔开，那两条极限特征线伸展到无穷远处时，既不与过渡曲线相交，也不与激波相交(如图 105 中的 CD 和 $C'D'$). 因为由物面发出的(比如，由物面形状变化所引起的)扰动将沿第一组特征线传播到达亚声速区的边界，显然，位于过渡曲线与极限特征线之间的超声速区部分会影响亚声速区，但极限特征线右边的流动绝不会影响左边的流动，即右边的流动受到(比如 C 或 C' 右边剖面变化引起的)扰动时，对左边的流动不产生影响. 我们知道，激波后面的流动不影响前面的流动. 于是，整个流动可以划分成三部分($DCC'D'$ 左边，$DCC'D'$ 与 $FEE'F'$ 之间，$FEE'F'$ 右边)，这样，第二部分的流动不影响第一部分的流动，而第三部分的流动则不影响第二部分的流动.

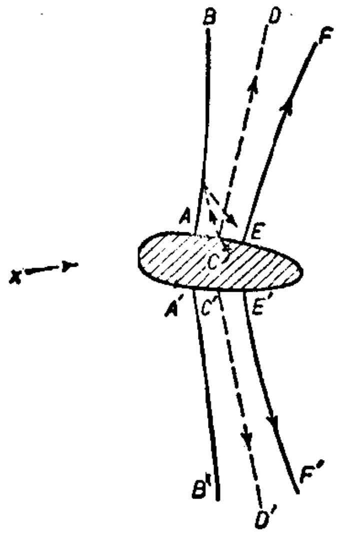


图 105

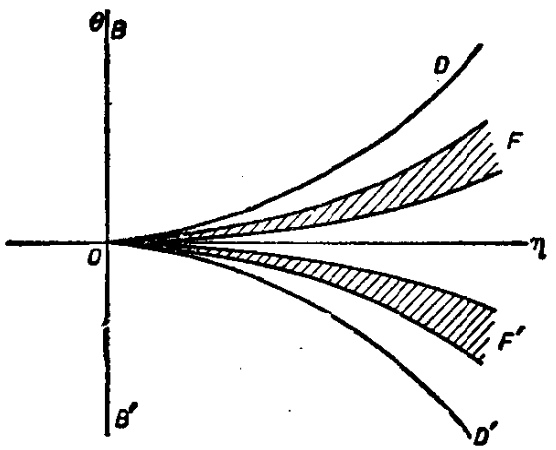


图 106

现在，我们要对刚才所阐述的流动图象给予定量的计算(和验证).

速度平面上的原点 ($\theta=\eta=0$) 对应于物理平面上无穷远处的区域，因而由这原点出发的速度平面特征线就对应于极限特征线 CD 和 $C'D'$. 图 106 中画出了原点的邻域，所用字母与图 105 中的相对应. 激波在速度平面上对应的不是一条线，而是两条线(这两条线对应于间断面两边的气流)；这些曲线间的区域(图 106 中的阴影区)与物理平面上的任何部分都不对应.

首先，我们必须弄清楚，对应于这种情形的是通积分 Φ_k 中的哪一个. 若 $\Phi(\theta,\eta)$ 的齐次次数是 k，则函数 $x=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\eta}$ 和 $y=\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}$ 是齐次的，且齐次次数分别为 $k-\dfrac{1}{3}$ 和 $k-\dfrac{1}{2}$. 一般说来，当 θ 和 η 趋于零时，在物理平面上就达到无穷远处(x 和 y 趋于无穷大). 很显然，为此应有 $k<\dfrac{1}{3}$. 但物理平面上的极限特征线不必完全落在无穷远处，即在曲线 $9\theta^2=4\eta^3$ 上不必处处保持 $y=\pm\infty$. 在那种情况下$\left(当\ 2k+\dfrac{1}{6}<\dfrac{5}{6}时\right)$, (110.6) 中方括号内的第二项必为零. 于是函数 $\Phi(\theta、\eta)$ 必由 (110.6) 的第一项给出:

$$\Phi=A\theta^{2k}F\left(-k,\ -k+\frac{1}{2};-2k+\frac{5}{6};1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}\right). \tag{112.1}$$

函数 $y(\theta,\ \eta)$ (它也满足欧拉-特里科米方程)的形式与此式相同，只是用 $k-\dfrac{1}{2}$ 代替上式中的 k.

但是，对于 $k<\dfrac{1}{3}$ 的任意值，若表达式(112.1)(比如)在上支特征线$\left(\theta=+\dfrac{2}{3}\eta^{3/2}\right)$邻近是成立的，则在下支特征线$\left(\theta=-\dfrac{2}{3}\eta^{3/2}\right)$邻近就不成立. 所以，我们还必须要求：在速度平面上，绕原点从一条特征线通过半平面 $\eta>0$ 而移向另一条特征线(图 102 中的路线 $A'B'$)时，函数 $\Phi(\theta,\eta)$ 应一直保持 (112.1) 的形式. 这个路线

对应于物理平面上从一条极限特征线上的远距离点，沿着通过亚声速区的路线，到另一条极限特征线上的远距离点，所以，没有一点与流动发生间断的激波相交. 在沿这样的路线移动时，(112.1)的超几何函数的变换是由(110.13)的第一个公式给出的，因而必须要求这个公式中 F_2 的系数为零. 满足这个条件的 k 值（对于 $k<\frac{1}{3}$ 而言）有 $k=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}n(n=0,1,2,\cdots)$. 在这些值中，我们只能取一个，即

$$k=-\frac{1}{3}; \tag{112.2}$$

可以证明，凡 $n>1$ 的所有 k 值，都会导致：从速度平面到物理平面的变换不是一一对应的(绕速度平面移动一圈，相当于绕物理平面移动不止一圈)，因而物理上的流动是多值的，这当然是不可能的. 另一方面，$k=\frac{1}{6}$ 给出这样一个解：当 θ 和 η 趋于零时，这个解表示在物理平面上，并非沿每个方向都能到达无穷远处；显然，这样一个解从物理上讲也是不可能的.

当 $k=-\frac{1}{3}$ 时，公式(110.13)右边 F_1 的系数为 1，这就是说，从一条特征线移到另一条特征线时，函数 Φ 不变. 这表明 Φ 是 θ 的偶函数，因而坐标 $y=\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$ 是奇函数. 从物理上讲，这表明在这里所考虑的一级近似的条件下，在离物体较远的地方，流动图象是关于平面 $y=0$ 对称的，无论物体的形状如何，特别是不管有没有升力，都是如此.

这样，我们就确定了在点 $\eta=\theta=0$ 处 $\Phi(\eta,\theta)$ 的奇异性质. 由此，我们可以立即得出在离物体较远处的过渡曲线、极限特征线和激波的形状. 每一条这样的曲线，都必定对应于比率 $\frac{\theta^2}{\eta^3}$ 的某确定

值，又因为Φ有$\theta^{-2/3}f\left(\frac{\eta^3}{\theta^2}\right)$的形式，所以由公式(110.4)，我们得 $x\sim\theta^{-4/3}$，$y\sim\theta^{-5/3}$. 因而这些曲线由下列形式的方程确定：

$$x=常数\times y^{4/5}, \tag{112.3}$$

其常数值各不相同. 沿着这些曲线，θ 和 η 按

$$\theta=常数\times y^{-3/5},\quad \eta=常数\times y^{-2/5} \tag{112.4}$$

的规律减小. 这些结果是 Ф. И. 弗兰克尔(1947)得到的.

为确定起见，下面将写出其符号适用于上半平面（$y>0$）的公式.

我们来说明怎样才能计算这些公式中的系数. 值 $k=-\frac{1}{3}$是使 Φ_k 化为代数函数的那些 k 值中的一个（参看 § 111）. 在目前情况下，能确定出 Φ 的那个特解可写为

$$\Phi=\frac{a_1}{2}\frac{\partial f}{\partial\theta},$$

式中 a_1 是任意的正常数，而 f 是三次方程

$$f^3-3\eta f+3\theta=0 \tag{112.5}$$

的根，且当 $9\theta^2-4\eta^3>0$ 时是实根. 于是

$$\Phi=\frac{a_1}{2}\frac{\partial f}{\partial\theta}=-\frac{a_1}{2(f^2-\eta)} \tag{112.6}$$

因而坐标为

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}=\frac{a_1}{2}\frac{f^2+\eta}{(f^2-\eta)^3},\\ y&=\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=-a_1\frac{f}{(f^2-\eta)^3}.\end{aligned}\right\} \tag{112.7}$$

引用参数

$$s=\frac{f^2}{f^2-\eta},$$

可把这些公式写成有用的参数形式. 于是

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{y^{4/5}}&=\frac{a_1^{1/5}(2s-1)}{2s^{2/5}},\\
\eta y^{2/5}&=a_1^{2/5}s^{1/5}(s-1),\\
\theta y^{3/5}&=\frac{1}{3}a_1^{3/5}s^{4/5}(3-2s),
\end{aligned}\right\}\tag{112.8}$$

这些公式用参数的形式给出了 η 和 θ 对坐标的函数关系．参数 s 取零和零以上的正值（$s=0$ 对应于 $x=-\infty$，即对应于无穷远来流）．特别是，值 $s=\frac{1}{2}$ 对应于 $x=0$，它给出了垂直于 x 轴且靠近物体的平面内 y 值较大处的速度分布．值 $s=1$ 对应于过渡曲线 $(\eta=0)$，容易看出，$s=\frac{4}{3}$ 则对应于极限特征线．常数 a_1 的值依赖于物体的实际形状，并且只能由该问题适用于全空间的某个精确解确定．

公式 (112.8) 只适用于激波前面的区域．由下面的论述可知一定会出现激波．由公式 (110.5) 进行简单计算后可给出雅可比行列式 Δ 的表达式为

$$\frac{a_1^2(4f^2-\eta)}{(f^2-\eta)^3}.$$

容易看出，在特征线上或特征线左边的整个区域，即对应于物理平面上极限特征线的上游区域，有 $\Delta>0$（而不是等于零）．但在特征线的右边，Δ 为零，所以，在这个区域内一定出现激波．

欧拉-特里科米方程的解必须满足激波上的边界条件如下．令 θ_1,η_1 和 θ_2,η_2 为间断面两边 θ 和 η 的值．首先，它们必须对应于物理平面上同一条曲线，即

$$x(\theta_1,\eta_1)=x(\theta_2,\eta_2),\quad y(\theta_1,\eta_1)=y(\theta_2,\eta_2).\tag{112.9}$$

其次，间断面切向速度分量连续的条件（即势函数 ϕ 沿间断面的导数连续）等价于势函数本身连续的条件：

$$\phi(\theta_1,\eta_1)=\phi(\theta_2,\eta_2); \tag{112.10}$$

势函数 ϕ 通过(111.3)由函数 Φ 确定. 最后, 其它条件可由激波极线方程(86.6)的极限形式得到, 该方程表明间断面两侧速度分量之间的关系. 如用 $\theta_2-\theta_1$ 代替(86.6)中的角 χ,并引用 η_1,η_2代替 v_1,v_2,便得下列关系:

$$2(\theta_2-\theta_1)^2=(\eta_2-\eta_1)^2(\eta_2+\eta_1). \tag{112.11}$$

在目前的情况下,在激波后面(速度平面中 OF 与 OF' 之间的区域, 图 106), 欧拉-特里科米方程的解和(112.5),(112.6)形式相同,不过,当然要用一个不同的常系数(记作 $-a_2$)来代替 a_1. 四个联立方程(112.9)—(112.11)可确定比值$\frac{a_2}{a_1}$,并建立量 $\eta_1,\theta_1,\eta_2,\theta_2$ 之间的关系. 这些方程的解是非常复杂的;它给出以下结果.激波对应于公式(112.8)中参数 s 的值为$s=\frac{1}{6}(5\sqrt{3}+8)=2.78$.

它给出激波的形状和间断面前方的速度分布. 在激波后面(下游)的区域内, 系数 $-a_2$ 是负的, 且 $f^2/(f^2-\eta)$ 取负值. 利用正的量 $s=f^2/(\eta-f^2)$ 为参数,我们得到代替(112.8)的公式为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{x}{y^{4/5}}=\frac{a_2^{1/5}(2s+1)}{2s^{2/5}},\\
&\eta y^{2/5}=a_2^{2/5}s^{1/5}(s+1),\\
&\theta y^{3/5}=-\frac{1}{3}a_2^{3/5}s^{4/5}(2s+3),
\end{aligned}\right\} \tag{112.12}$$

式中,

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{9\sqrt{3}+1}{9\sqrt{3}-1}=1.14,$$

s 的取值从激波上的$\frac{1}{6}(5\sqrt{3}-8)=0.11$ 到下游无穷远处的零.

图 107 画出 $\eta y^{2/5}$ 和 $\theta y^{3/5}$ 随 $xy^{-4/5}$ 变化的关系曲线,它们是由公式(112.8)和(112.12)算出的(常数 a_1 任意取为 1).

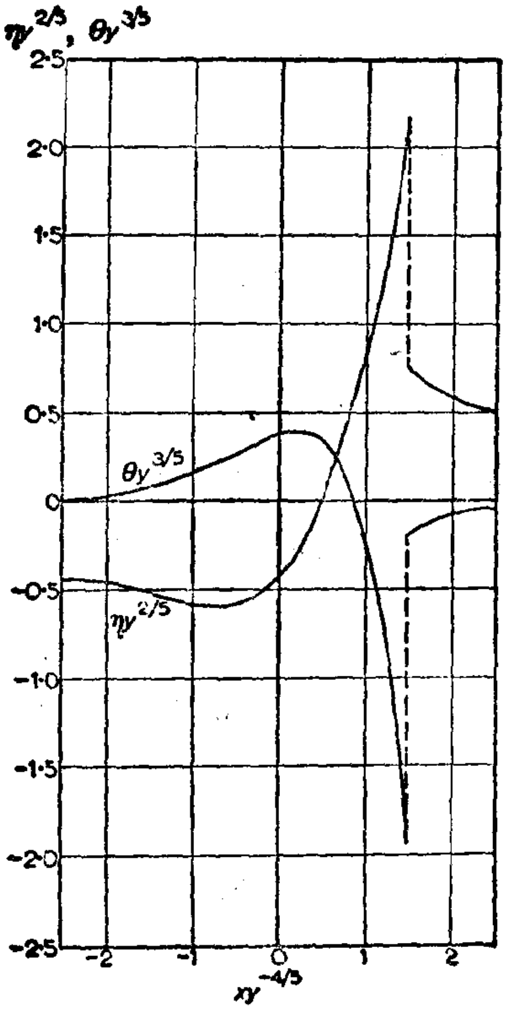


图 107

§113. 间断线与过渡曲线的相交

作为利用欧拉-特里科米方程研究跨声速流动性质的又一个例子，我们来考虑弱间断线从过渡曲线上反射的问题(Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹，1954).

假设入射到过渡线上(到达交点)的弱间断线是普通类型的，比如是由气流绕尖锐拐角形成的，即速度对空间坐标的一阶导数在该间断线上是不连续的．它从过渡曲线上“反射”后，即为另一弱间断线，但该间断线的性质预先是不知道的，而必须通过研究交点附点的流动来确定．我们取这点为 xy 平面上的原点，并取 x 轴

沿该点上气体速度的方向，所以这点也对应于速度平面上的原点.

我们知道，弱间断线与特征线是重合的. 设速度平面上的特征线Oa(图 108a)对应于入射间断线. 因为坐标x, y在间断线上是连续的,所以,一阶导数Φ_η,Φ_θ也一定是连续的. 另一方面,Φ的二阶导数可用速度对空间坐标的一阶导数表示,所以,必须是间断的. 用带方括号的量表示这些量的间断值，因此，在Oa上有

$$[\Phi_\eta]=[\Phi_\theta]=0;[\Phi_{\theta\theta}],[\Phi_{\theta\eta}];[\Phi_{\eta\eta}]\neq 0. \qquad (113.1)$$

特征线Oa两侧区域 1 和 2 内的函数Φ本身，在特征线上必定没有奇点. 这样的解可由(110.6)第二项令$k=\frac{11}{12}$求得，这个解与两项之差$1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}$的平方成正比(另一个独立的解$\Phi_{\frac{11}{12}}$在特征线上有一个奇点,见下文). 这个函数的一阶导数在特征线上为零，而二阶导数是有限值. 此外，Φ还可以包括那些在物理平面上使流动没有奇点的欧拉-特里科米方程的特解. θ和η的齐次次数为最低的这种解是$\eta\theta$(参看 § 111). 于是，在特征线Oa附近,此线的每一侧,我们寻求的Φ形式为

$$\left\{\begin{aligned}&\text{在区域 1 中},\ \Phi=-A\eta\theta-\pi B\zeta^2\theta^{\frac{11}{6}}F\left(\frac{13}{12},\frac{19}{12};3;\zeta\right),\\&\text{在区域 2 中},\ \Phi=-A\eta\theta-\pi C\zeta^2\theta^{\frac{11}{6}}F\left(\frac{13}{12},\frac{19}{12};3;\zeta\right),\end{aligned}\right\} \qquad (113.2)$$

式中,A,B,C是常数(我们将证明它是正数)，而$\zeta\equiv1-\frac{4\eta^3}{9\theta^2}$;在特征线上,$\zeta=0$.

速度平面上第二条特征线(图 108a 中Ob)对应于从过渡曲线上反射回来的弱间断线. 在这个特征线附近,函数Φ的形式可利用(110.11)—(110.13)对函数(113.2)进行解析延拓而求得. 但

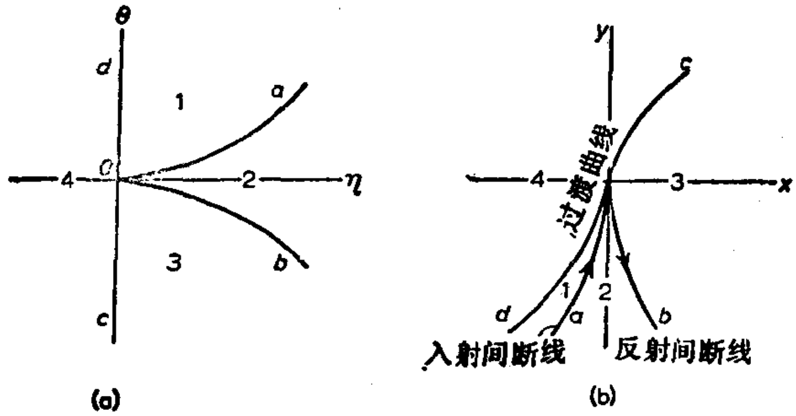


图 108

是，当$k=\frac{11}{12}$时，函数 F_1 是没有意义的. 所以不能直接用这些公式. 为此，必须在这些公式中，首先令 $k=\frac{11}{12}+\epsilon$，然后让 ϵ 趋于零. 根据超几何函数的一般理论，这样就出现对数项.

用(110.13)计算，可给出特征线 Ob 邻近区域 3 中函数 Φ 的下列表达式(我们保留到 ζ 的二阶项)：

$$\Phi=-A\theta\eta-B(-\theta)^{\frac{11}{6}}[\zeta^2\ln|\zeta|-108+41.1\zeta+4.86\zeta^2]; \tag{113.3}$$

在确定反射间断线上速度分布的奇点性质时，实际上只有对数项是重要的(见下面).

从特征线 Oa 的邻域到 Ob 的邻域，在区域 2 中函数 Φ 的类似的变换(利用公式(110.11))，只要将 B 换成$\frac{1}{2}C$，就可得出一个与(113.3)类似的表达式. 所以，在特征线 Ob 上坐标 x 和 y 连续的条件可给出

$$C=2B. \tag{113.4}$$

其次，我们必须证实，雅可比行列式 Δ(110.5)是正的，因为在任何地方它都一定不等于零. 在特征线 Oa 邻近，Δ 可由函数

(113.2)算出，并且容易看出它是正的；Δ 的首项是 A^2. 在特征线 Ob 邻近，利用(113.3)计算可给出 Δ 的首项为

$$\Delta=-16\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}AB\eta^{\frac{1}{4}}\ln|\zeta|.$$

当接近特征线时，该对数趋于 $-\infty$. 所以 $\Delta>0$ 的条件可给出 $AB>0$，即 A 和 B 必须同号.

最后，为了确定过渡曲线的形状，需要求出纵轴 $\eta=0$ 的上半轴和下半轴邻近 Φ 的表达式. 适用于上半轴的表达式，只要把(113.2)中的超几何函数变换成其自变量为 $1-\zeta=\frac{4\eta^3}{9\theta^2}$ 的超几何函数即得，当 $\eta=0$ 时，它等于零. 计算一下这个变换中系数的数值，并且只保留 η 最低幂次的项，我们得

$$\Phi=-A\eta\theta-18.6B\theta^{\frac{11}{6}}. \tag{113.5}$$

解析延拓到下半轴邻近区域，给出

$$\Phi=-A\eta\theta-18.6\sqrt{3}B(-\theta)^{\frac{11}{6}}; \tag{113.6}$$

其计算方法，与推导变换公式(110.13)时所用的计算方法类似.

现在，我们可以确定所有这些待求的曲线的形状. 在特征线上，略去高阶项，我们有

$$x=\Phi_\eta=-A\theta,\ y=\Phi_\theta=-A\eta.$$

我们不妨假定上支特征线($\theta>0$)对应于到达交点的弱间断线. 因为气体速度是沿 x 轴的正向，所以，如果这个间断线位于 $x<0$ 的半平面，则它就是到达交点的间断线. 由此可知常数 A 一定是正数，因而常数 B 也必是正数. 在物理平面上，这个间断线的方程为

$$x=-\frac{2}{3\sqrt{A}}(-y)^{3/2}. \tag{113.7}$$

对应于下支特征线的“反射”间断线由方程

$$x=\frac{2}{3\sqrt{A}}(-y)^{3/2} \tag{113.8}$$

给出，就是说，这两个间断线是半三次抛物线的两支，其尖点在过渡曲线上(图 108b，其中的曲线和区域的标号均与图 108a 中的标号相对应).

过渡曲线方程可由函数(113.5)和(113.6)求得. 对 η 和 θ 微分，然后令 $\eta=0$，由(113.5)我们得到 $\theta>0$ 部分的方程为 $x=-A\theta$，$y=-\frac{11}{6}\times 19.6B\theta^{\frac{5}{6}}$，由此得

$$y=-36.0B\left(-\frac{x}{A}\right)^{\frac{5}{6}}. \tag{113.9}$$

这是图 108b 中过渡曲线的下半部分. 类似地，我们由(113.6)得过渡曲线上半部分的方程为

$$y=\sqrt{3}\times 36.0B\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{5}{6}}. \tag{113.10}$$

因而，两条间断线和两支过渡曲线在交点 O 处有一条公共切线(y 轴). 在这一点附近，两支过渡曲线位于 y 轴的两边.

在到达点 O 的间断线上，速度对空间坐标的导数是间断的；作为一个特征量，我们可以考虑导数 $\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y$ 的间断量. 利用关系式

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y=\frac{\partial(\eta,y)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(\eta,y)}{\partial(\eta,\theta)}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(\eta,\theta)}=-\frac{\Phi_{\theta\theta}}{\Delta}$$

和公式(113.2)，(113.4)，我们得

$$\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_y\right]_2^1=26.9\frac{B}{\eta^{1/4}A^2}=26.9\frac{B}{(-y)^{1/4}A^{7/4}}. \tag{113.11}$$

于是，当接近交点时，这个间断量按 $|y|^{-\frac{1}{4}}$ 的规律增加.

在反射的弱间断线上，速度的导数不是间断的，但速度分布有一个很奇特的奇点. 由(113.3)计算坐标 $x=\Phi_\eta$ 和 $y=\Phi_\theta$ 与 η,θ 的函数关系(只保留方括号中的第一项)，我们可以把反射间断线

邻近 η 对 x 的依赖关系(y 给定时)写成参数形式:

$$\left.\begin{aligned}\eta&=\frac{|y|}{A}+\frac{x-x_0}{2\sqrt{A|y|}}-\frac{1}{6A}|y|\xi,\\x-x_0&=\frac{1}{3\sqrt{A}}|y|^{3/2}\xi-5.7\frac{B}{A^{7/4}}|y|^{7/4}\xi\ln|\xi|.\end{aligned}\right\}\qquad(113.12)$$

式中,ξ 是参数,而 $x=x_0(y)$ 是物理平面上间断线的方程.

欧拉-特里科米方程也可研究激波能否终止在它与过渡曲线的交点上(图 109a 中,激波到达的点 O ①)的问题. 在这样的点邻近,激波是弱的,即流动是跨声速的. 但是,欧拉-特里科米方程显然没有能描述这种流动且满足激波上一切必要条件的解. 显然,也不存在对应于激波与过渡曲线的交点为两者的终点的解(图 109b,那时激波并不是真正到达点 O,因为激波一侧的流动是亚声速的). 这意味着激波必须是或者伸展到无穷远,或者像图 109c 中的曲线(如果它是在局部超声速区中形成的,参看 § 112 开头)那样,对于它本身的两端而言都是"出发的". 过渡曲线可以终止在它与激波的交点上,但这里激波的强度不等于零.

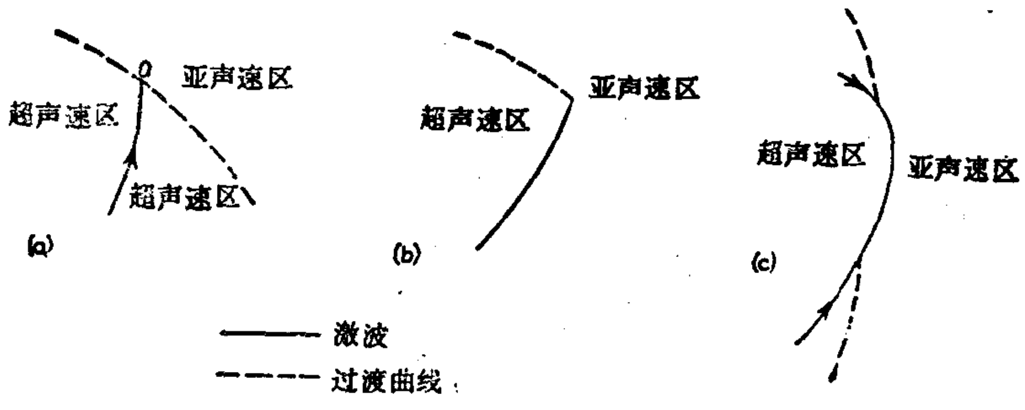


图 109

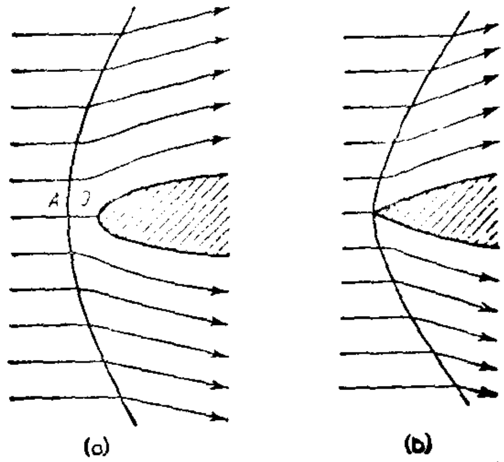
① 激波的"起点"可以是超声速流动中任意一点,研究它的性质没有什么特殊困难,参看§107 末.

第十三章　绕有限物体的流动

§114. 绕物体的超声速流动中激波的形成

在绕任意物体的超声速流动中，由简单的论证即可表明，在物体的前面一定要形成激波. 因为物体的存在而在超声速流动中所引起的扰动，只能向下游传播. 所以，流向物体的均匀超声速来流在到达物体的前端之前将不会受到扰动. 因而前端物面上气体速度的法向分量不等于零，这与必要的边界条件发生矛盾. 这一难题的解决只能是出现激波，结果，使激波与物体前端之间的气流变成亚声速的.

这样，在来流为超声速气流的情况下，物体的前面就形成激波，且这激波一般并不附体；我们通常称它为头激波. 在激波前面，流动是均匀的；在激波后面，流动发生变化，顺着物体弯曲(图110a). 激波面伸展到无穷远处；而在离物体很远的地方，激波变弱，它与来流的夹角接近于马赫角.



(a)　　(b)

图　110

只有在物体的前端尖锐的情形下，激波才能附体. 这时，间断面有个顶点与物体的顶点重合(图 110b)；应记住，在非对称流动中，这曲面的一部分可能是弱间断面.

但是，对于形状一定的物体而言，只有当速度超过某个界限时，这种流动图象才是可能的；在较低的速度下，即使物体是尖头的，激波也要从物体的前端"脱开"(参看 § 104，§105).

我们来研究绕旋成体的超声速流动(来流沿平行于体轴的方向)，并确定物体圆钝的前端处的气体压力(图 110a 中驻点 O). 根据对称性，终止于点 O 的流线显然与激波是垂直相交的，所以，在点 A 处垂直于间断面的速度分量与合速度相同. 来流中各个量的值照例用下标 1 表示，而点 A 处的激波后面的值用下标 2 表示. 由公式(85. 7)和(85. 8)立即可求出激波后的参数值如下：

$$p_2 = p_1\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\mathrm{M}_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right),$$

$$v_2 = c_1\frac{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2}{(\gamma+1)\mathrm{M}_1}, \quad \rho_2 = \rho_1\frac{(\gamma+1)\mathrm{M}_1^2}{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_1^2}.$$

现在，借助于沿一条流线诸参量变化的公式，可以求得点 O 处的压力 p_0(这里的气体速度 $v=0$). 我们有(参看 § 80 问题)

$$p_0 = p_2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{v_2^2}{c_2^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

经简单计算后，得

$$p_0 = p_1\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\frac{\mathrm{M}_1^2}{\left(\gamma-\frac{\gamma-1}{2\mathrm{M}_1^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}. \qquad (114.1)$$

上式给出了超声速来流($\mathrm{M}_1>1$)绕过物体前端处的压力.

为便于比较，兹将在气体连续绝热减速而无激波的情况下求得的驻点压力公式(也适用于亚声速来流)写在下面：

$$p_0=p_1\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \tag{114.2}$$

当 $\mathrm{M}_1=1$ 时，由这两个公式算出的 p_0 值相同；但当 $\mathrm{M}_1>1$ 时，由公式(114.2)算出的压力总是大于由公式(114.1)算出的真正压力 $p_0$①.

在速度很大($\mathrm{M}_1\gg1$)的极限情况下，公式(114.1)给出

$$p_0=p\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\frac{\mathrm{M}_1^2}{\gamma^{\frac{1}{\gamma-1}}}, \tag{114.3}$$

即压力 p_0 与来流速度的平方成正比．由此结果，可以得出结论：在速度与声速相比是个大量的情况下，作用在物体上的总阻力与速度的平方成正比．应注意，在速度与声速相比是个小量，但速度大小仍使雷诺数为大量的情况下，阻力变化的规律和上述的相同(参看 §45)．

关于绕任意物体的超声速流动的基本性质，至今尚未进行过全面研究．除了必定会形成激波这一事实之外，我们还可以断定，在离物体很远的地方，一定有相继的两个激波(Л. Д. 朗道，1945)．因为在远处，物体所引起的扰动很小，所以可把扰动看作是由 x 轴(此轴通过物体且平行于流动方向)出射的柱面声波；像通常一样，可选择一个使物体在其中静止的坐标系，来研究其中的流动，由此

---

① 这个论断是普遍正确的，而无须假设是理想气体．因为，当有激波时，点 O 处气体的熵 S_0 大于 S_1，而当没有激波时，S_0 将等于 S_1．但在这两种情况下，焓都是

$$w_0=w_1+\frac{1}{2}v_1^2,$$

这是因为当流线与压缩间断面正交时，量 $w+\frac{1}{2}v_1^2$ 不变．由热力学公式

$$dw=Tds+dp/\rho,$$

可知导数

$$(\partial p/\partial s)_w=-\rho T<0,$$

即当 w 保持不变时，熵增加，压力就一定降低，因而该论断成立。

我们将得到一个波，这里时间用$\frac{x}{v_1}$表示，传播速度用$\frac{c_1}{\sqrt{M_1^2-1}}$表示(参看§115). 所以，我们可直接利用§95中对柱面波在离声源很远地方所求得的结果. 于是，我们得到了远离物体处激波的下述图象：在第一个激波中，压力出现跃升，所以，在它后面有一稠密区，接着是一个压力逐渐降低的区域，并过渡到稀疏区；其后，在第二个激波中，压力又出现跃升. 前激波的强度随着离物体距离r增加按$r^{-3/4}$的规律降低，而两个激波之间的距离则按$r^{1/4}$的规律增加.

现在来研究当马赫数M_1逐渐增大时激波的产生和发展. 当M_1为小于1的某个值时，首先在物面附近出现一个超声速区. 在这个区域中，至少出现一个激波. 但我们不知道，究竟是超声速区一形成就马上出现激波，还是当M_1为大一些的值(仍然小于1)时才出现激波. 我们也不知道，当激波初形成时(因而很弱)，究竟它是从物面发出的，还是在某个距离以外开始形成的. 当然，激波在超声速区域的边界上终止；关于激波在其终止点邻近的性质，至今尚未研究(§112开头已经提到这一点).

随着M_1的增加，超声速区域扩大，因而激波长度增大；当$M_1=1$时，激波到达无穷远. 这就是§112中(对二维情形)已经证明过的当$M_1=1$时所存在的激波；因而也就得出结论，激波肯定是在$M_1<1$时开始出现的.

当M_1开始大于1时，就出现另一种激波——头激波，它与无限宽的整个迎面气流相交. 当M_1恰好等于1时，物体前面的流动完全是亚声速的(§112). 所以，当$M_1>1$但任意接近于1时，来流的超声速部分可在物体前面任意远的地方. 因而头激波也是如此，随着M_1的进一步增加，头激波逐渐靠近物体.

§115. 绕尖削物体的超声速流动

为使物体在超声速流动中是流线型的，也就是使它所受的阻力尽可能小，则其形状与亚声速流动中相应的形状是完全不同的. 我们记得，在亚声速情况下，流线型物体是细长的，前钝后尖的. 但是，在绕这样物体的超声速流动中，物体前面将形成强激波，这就导致阻力显著增加. 所以，在超声速的情况下，细长流线型物体应是两头尖削的，且尖顶角要小；如果物体相对于气流方向是倾斜的，则其夹角(攻角)也必须很小.

在绕这种形状物体的定常超声速流动中，各处的气体速度与来流速度相比，其大小和方向的差别都很小，即使在物体邻近处也是如此，且所形成的激波很弱；头激波的强度随物体尖顶角的减小而减小. 在远离物体的地方，气体的流动是由出射的声波所组成的. 阻力的主要部分可以认为是由于运动物体的动能转换成物体发射的声波的能量. 只有在超声速流动中才会出现的这种阻力称为波阻①；波阻可用对任意截面物体都适用的普遍公式算出(T. 冯. 卡门, 1936).

上述流动的性质使我们可以应用线化的势方程(106.4)：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-\beta^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0, \qquad (115.1)$$

为简便起见，这里我们引进了正的常数：

$$\beta^2=\frac{v_1^2-c_1^2}{c_1^2}; \qquad (115.2)$$

x 轴沿流动方向，下标 1 表示对应于来流的量，而 $1/\beta$ 就是马赫角的正切.

方程(115.1)在形式上与二维波动方程相同，只是用 x/v_1 表

① 波阻加以由于摩擦以及物体尾部气流分离而产生的阻力即得总阻力.

示时间，并用 v_1/β 表示波的传播速度而已．当然，这不是偶然的；其物理意义如前所述：在远离物体的地方，气体流动是由物体"发射"的出射声波所组成的．若将无穷远处气体看作是静止的，而物体是运动的，则在空间某个给定点看来，物体的横截面将随时间而变化，而在时刻 t 扰动播及的距离(即到达马赫锥的距离)将按 v_1t/β 而增加．于是问题化为可变截面的二维声发射(以速度 v_1/β 传播)问题．

按这种"声学比拟"的办法，利用由声源发射的柱面声波的势函数表达式(73.15)(在距离远大于声源尺度的地方)，并用 x/β 替换该式中的 ct，则可以直接写出待求的气体速度势的表达式．

令 $S(x)$ 为在垂直于流动方向(x 轴)的平面内物体的横截面积，l 为沿流动方向上物体的长度；并取物体的前端为原点．于是

$$\phi(x,r)=-\frac{v_1}{2\pi}\int_0^{x-\beta r}\frac{S'(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\beta^2r^2}};\quad(115.3)$$

下限取为零，这是因为当 $x<0$(以及当 $x>l$)时，$S(x)\equiv 0$．

这样，我们就完全确定了离轴线的距离 r 远大于物体厚度的地方的气体流动①．当然，在超声速流动中，由物体发出的扰动只能播及锥面 $x-\beta r=0$ 后面的区域，此锥面的顶点在物体前端；这个锥的前面，则是 $\phi=0$(均匀流)．在 $x-\beta r=0$ 和 $x-\beta r=l$ 这两个锥面之间，势函数由公式(115.3)所确定；在锥面 $x-\beta r=l$(其顶点在物体后端)的后面，(115.3)中积分上限显然是常数 l．在所讨论的近似程度下，这两个锥面都是弱间断面，实际上，它们是弱激波．

作用在物体上的阻力，就是每单位时间内由声波所带出的动

① 在绕轴对称物体的轴向流动情况下，对于直到物面为止的所有 r，公式(115.3)都是正确的，特别是，由这个式子我们可以导出绕细锥流动的公式(105.6)．

量的 x 分量. 我们取一个半径 r 很大, 且其轴沿 x 轴的圆柱面, 则通过这个表面的动量通量密度的 x 分量为

$$\Pi_{xr}=\rho v_r(v_x+v_1)\cong\rho_1\frac{\partial\phi}{\partial r}\left(v_1+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right).$$

在整个圆柱面上取积分, 其第一项等于零, 这是因为 ρv_r 的积分是通过这个表面总的质量通量, 这个质量通量为零. 所以

$$F_x=-2\pi r\int_{-\infty}^{\infty}\Pi_{xr}dx=-2\pi r\rho_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial\phi}{\partial x}dx. \qquad (115.4)$$

在(波区内)距离较大的地方, 势函数的导数可按 §73 那样计算(参看公式(73.17)), 因而得

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{v_1}{2\pi}\sqrt{\frac{\beta}{2r}}\int_0^{x-\beta r}\frac{S''(\xi)\,d\xi}{\sqrt{x-\xi-\beta r}}.$$

将这个表达式代入(115.4), 而将积分的平方写成重积分; 为简便起见, 令 $x-\beta r=X$, 我们得

$$F_x=\frac{\rho_1 v_1^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^X\int_0^X\frac{S''(\xi_1)S''(\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 dX}{\sqrt{(X-\xi_1)(X-\xi_2)}}.$$

对 X 的积分可以积出来; 在改变积分顺序之后, 可从 ξ_1 和 ξ_2 中较大的一个到无穷大进行积分. 我们先取一个大而有限的量 L 作为上限, 然后让它趋于无穷大. 则有

$$F_x=-\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi}\int_0^l\int_0^{\xi_2}S''(\xi_1)S''(\xi_2)[\ln(\xi_2-\xi_1)-\ln 4L]d\xi_1 d\xi_2.$$

包含常数因子 $\ln 4L$ 这一项的积分为零, 因为在物体的顶端, 不仅面积 $S(x)$ 本身而且它的导数 $S'(x)$ 均为零. 所以有

$$F_x=-\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi}\int_0^l\int_0^{\xi_2}S''(\xi_1)S''(\xi_2)\ln(\xi_2-\xi_1)\,d\xi_1 d\xi_2,$$

或

$$F_x=-\frac{\rho_1 v_1^2}{2\pi}\int_0^l\int_0^l S''(\xi_1)S''(\xi_2)\ln|\xi_2-\xi_1|\,d\xi_1 d\xi_2. \qquad (115.5)$$

这就是我们所要求的细长尖削物体的波阻公式①. 该积分的量级是$(S/l^2)^2 l^2$,这里S是物体的某种平均横截面积. 因而

$$F_x \sim \rho_1 v_1^2 \frac{S^2}{l^2}.$$

对于细长体,用长度l平方表示的阻力系数按常规可定义为

$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 l^2}.$$

因而在现在的情况下

$$C_x \sim \frac{S^2}{l^4}; \tag{115.6}$$

它与横截面积的平方成正比.

应当指出,公式(115.5)与薄翼诱导阻力公式(47.4)在形式上完全类似; 这里用函数$v_1 S'(x)$替换(47.4)中的函数$\Gamma(z)$. 由于有这种类似,在计算(115.5)中的积分时, 我们可以利用 §47 末所阐述的方法.

还应指出,若将流动方向倒转过来, 则由公式(115.5)算出的波阻不变,因为该积分与物体延伸的方向无关. 波阻的这一性质,反映了线化理论的特征②.

最后, 我们来简要地讨论一下这个公式的应用范围. 这个问题可按以下方法处理. 在物体所"发射"的声波中, 气体质点的振幅是物体厚度的量级,我们用δ表示. 相应地,振动的速度就是波的振幅δ与周期l/v_1的比值$\delta:(l/v_1)$的量级. 但是,声波传播的线性近似(即线化的势函方程)总是要求气体速度与声速相比是个小量,就是说,我们必须有

---

① 在目前所考虑的近似程度上,(对于非轴对称的或攻角不为零的物体而言)升力为零.

② 在§117 所讲的薄翼波阻的理论中,这也是正确的.

$$\frac{v_1}{\beta} \gg \frac{v_1 \delta}{l}$$

或

$$M_1 \ll \frac{l}{\delta}. \tag{115.7}$$

上面两式实际上是相同的. 所以，当 M_1 的值与物体的长细比相近时，上述理论就不适用了.

在相反的极限情况下，即 M_1 接近于1，这时方程的线化不成立，上述理论当然也就不适用了.

问　题

设给定细长旋成体的体积为 V，长度为 l，试确定所受阻力为最小的旋成体的形状.

解：鉴于前文所述的类似关系（即(47.4)和(115.5)，）我们引进变量 θ，使

$$x = \frac{l}{2}(1-\cos\theta),$$

$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi$；$x$ 的起点在物体前端)；并把函数 $f(x)=S'(x)$ 写为

$$f = -l\sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin n\theta;$$

当 $x=0, l$ 时，$S=0$ 的条件，意味着求和式子中只出现 $n \geqslant 2$ 的项. 因而阻力系数为

$$C_x = \frac{\pi}{4}\sum_{n=2}^{\infty} nA_n^2.$$

而由函数 $f(x)$ 计算出物体的面积 $S(x)$ 和总体积 V 为

$$S = \int_0^x f(x)\,dx, \quad V = \int_0^l S(x)\,dx.$$

经简单计算后可得

$$V = \frac{\pi}{16} l^3 A_2,$$

即体积仅由系数 A_2 确定. 所以，若对于 $n \geqslant 3$，有 $A_n = 0$，则得最小的 F_x. 其

结果为

$$C_{x,\min}=\frac{128}{\pi}\left(\frac{V}{l^3}\right)^2=\frac{9\pi}{2}\left(\frac{S_{\max}}{l^2}\right)^2.$$

物体的横截面积为

$$S=\frac{1}{3}l^2A_2\sin^3\theta,$$

因而半径与 x 的函数关系为

$$R(x)=\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{V}{3l^4}\right)^{\frac{1}{2}}[x(l-x)]^{3/4}.$$

该物体是关于平面 $x=l/2$ 对称的①.

§116. 绕薄翼的亚声速流动

我们来研究亚声速气体绕流线型薄翼的流动. 像不可压缩流体一样，亚声速流动的流线型机翼必须是薄的，后缘尖锐而前缘圆钝，且攻角必须很小. 我们取流动方向为 x 轴，翼展方向为 z 轴.

因为空间各处的气体速度与来流速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的差别都不大②，所以可用线化的势函数方程(106.4)：

$$(1-M_1^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0. \tag{116.1}$$

在翼面(称为 C 面)上，速度必须是切向的，引进沿表面法向的单位矢量 $\boldsymbol{n}$，就可将这个条件写为

$$\left(v_1+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)n_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}n_z=0.$$

由于机翼扁平且攻角很小，法向 $\boldsymbol{n}$ 差不多与 y 轴平行，所以 $|n_y|$ 接近于 1，而 n_x 和 n_z 都很小. 因而可以略去二阶项 $n_x\frac{\partial\phi}{\partial x}$ 和 $n_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$，并用 ±1 替换 n_y(对上翼面为 +1，下翼面为 −1). 于是方程(116.1)

① 虽然在物体两端 $R(x)$ 为零，但 $R'(x)$ 却为无穷大，即物体不是尖削的；所以，严格说来，以上述方法为基础的近似式在端点附近是不适用的.

② 除机翼前缘驻线邻近的很小区域以外.

的边界条件为

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \tag{116.2}$$

既然假设机翼很薄，$\frac{\partial \phi}{\partial y}$在翼面上就可取 $y \to 0$ 时的极限值.

方程(116.1) 在条件(116.2) 下的解不难化为不可压缩流动问题的解. 为此，我们用下列变量来代替坐标 x, y, z:

$$x' = x, \quad y' = y\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}, \quad z' = z\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}. \tag{116.3}$$

用这组变量，方程(116.1)变为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = 0, \tag{116.4}$$

即拉普拉斯方程. 而物面则用另一个曲面 C' 来代替，C' 是这样得到的：令平行于 xy 平面的截面周线不变，但沿展向(z向)的所有尺度均按$\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}$的比率缩小.

于是边界条件(116.2)变为

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \phi}{\partial y'} \sqrt{1-\mathrm{M}_1^2} = 0,$$

引进新的势函数 ϕ' 代替 ϕ:

$$\phi' = \phi\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}, \tag{116.5}$$

边界条件可化成前面的形式. 于是我们得到对于 ϕ' 的拉普拉斯方程，其边界条件为

$$v_1 n_x \pm \frac{\partial \phi'}{\partial y'} = 0, \tag{116.6}$$

此式应在 $y' = 0$ 处得到满足.

但是，带有边界条件(116.6)的方程(116.4)，应是绕曲面 C' 流动的不可压缩流体速度势所应满足的方程. 所以，确定绕具有表面 C 的机翼的可压缩流动中的速度分布问题，就等价于寻求绕具有表面 C' 的机翼的不可压缩流动中的速度分布问题.

其次，我们来研究作用在机翼上的升力 F_y. 首先，我们指出，§37 中所导出的儒可夫斯基公式(37.4)对于可压缩流体是完全有效的，因为在所讨论的近似程度上，流体的变密度 ρ 可用常数 ρ_1 代替. 于是得

$$F_y=-\rho_1 v_1\int \Gamma dz, \tag{116.7}$$

这里是沿翼展 l_z 取积分的. 由关系式(116.5)以及机翼 C 和 C' 的横剖面周线相同，可知绕机翼 C 可压缩流动的速度环量 Γ 与绕机翼 C' 不可压缩流动的环量 Γ' 有以下关系：

$$\Gamma'=\Gamma\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}. \tag{116.8}$$

将此式代入(116.7)，并变成对 z' 积分，便得

$$F_y=-\frac{\rho_1 v_1\int \Gamma' dz'}{\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}}.$$

上式的分子是不可压缩流体中作用在机翼 C' 上的升力. 用 F_y' 表示它，我们有

$$F_y=\frac{F_y'}{\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}}. \tag{116.9}$$

引进升力系数

$$C_y=\frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 l_x l_z}, \qquad C_y'=\frac{F_y'}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 l_x l_z'}$$

(式中，l_x，l_z 是机翼 C 沿 x，z 方向的长度，l_x，$l_z'=l_z\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}$ 是机翼 C' 沿 x，z 方向的长度)，可把以上关系式改写为

$$C_y=\frac{C_y'}{\sqrt{1-\mathrm{M}_1^2}}. \tag{116.10}$$

对于展长很大(剖面不变)的机翼，在不可压缩流体中，升力系数与攻角成正比，且与机翼的长度或宽度无关，即

$$C_y'=\text{常数}\times\alpha \tag{116.11}$$

式中的常数只依赖于剖面的形状(参看§46). 所以，在这种情况下,(116.10)可用

$$C_y=\frac{C_y{}^{(0)}}{\sqrt{1-M_1^2}} \tag{116.12}$$

代替，这里C_y和$C_y{}^{(0)}$分别为可压缩和不可压缩流体中相同机翼的升力系数.于是，我们得到一条法则:可压缩流体中作用在大展长机翼上的升力等于不可压缩流体中作用在相同机翼（在相同的攻角下)上升力的$\frac{1}{\sqrt{1-M_1^2}}$倍(L.普朗特，1922; H. 葛劳渥特，1928).

对于阻力，也可得到类似的关系式. 和升力的儒可夫斯基公式一样，作用在机翼上诱导阻力公式(47.4)也完全可应用于可压缩流动. 作同样的变换(116.3)和(116.8),我们得

$$F_x=\frac{F'_x}{\sqrt{1-M_1^2}}, \tag{116.13}$$

这里,F'_x是不可压缩流体中作用在C'上的阻力. 当展长增加时，诱导阻力趋于常数极限(§47). 所以，对于充分长的机翼，可用$F_x{}^{(0)}$代替F'_x($F_x{}^{(0)}$是不可压缩流体中机翼C的阻力). 因而阻力系数为

$$C_x=\frac{C_x{}^{(0)}}{1-M_1^2}. \tag{116.14}$$

将此式与(116.12)进行比较,我们看出,对于可压缩流体和不可压缩流体,比值C_y^2/C_x是相同的.

当然，若M_1的值接近于1，则这里所给出的所有结果均不适用,因为那时线化理论是不适用的.

§117. 绕机翼的超声速流动

如果超声速气流中机翼是流线型的，则它的前后端一定都是

尖削的，就像§115中所讨论的细长体那样.

这里，我们只研究绕展长很大的薄翼的流动，且沿翼展方向剖面不变. 若把翼展看作是无限的，这就对应于二维气体流动(在xy平面内). 现在势函数方程不再是(115.1)，而是

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\beta^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0, \tag{117.1}$$

其边界条件为

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]_{y\to\pm 0}=\mp v_1 n_x, \tag{117.2}$$

上式右边的符号$\mp$分别指上下翼面. 方程(117.1)是一维波动方程，其通解的形式为

$$\phi=f_1(x-\beta y)+f_2(x+\beta y).$$

影响着流动的扰动是从物体发出的，这个事实表明，在机翼上方($y>0$)，我们必须有$f_2\equiv 0$，所以，$\phi=f_1(x-\beta y)$；而在机翼下方($y<0$)，$\phi=f_2(x+\beta y)$. 为确定起见，我们将考虑机翼的上面区域，那里，$\phi=f(x-\beta y)$. 函数f由条件(117.2)确定，令式中$n_x\approx-\zeta_2'(x)$，这里$y=\zeta_2(x)$是翼剖面上部的方程(图111a). 我们有

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]_{y\to+0}=-\beta f'(x)=v_1\zeta_2'(x),$$

由此得

$$f=-\frac{v_1}{\beta}\zeta_2(x).$$

于是$y>0$处的速度分布由势函数

$$\phi(x,y)=-\frac{v_1}{\beta}\zeta_2(x-\beta y) \tag{117.3}$$

所确定. 类似地，可知$y<0$处，有

$$\phi(x,y)=\frac{v_1}{\beta}\zeta_1(x+\beta y),$$

其中，$y=\zeta_1(x)$是翼剖面下部的方程. 应指出，势函数以及其它诸

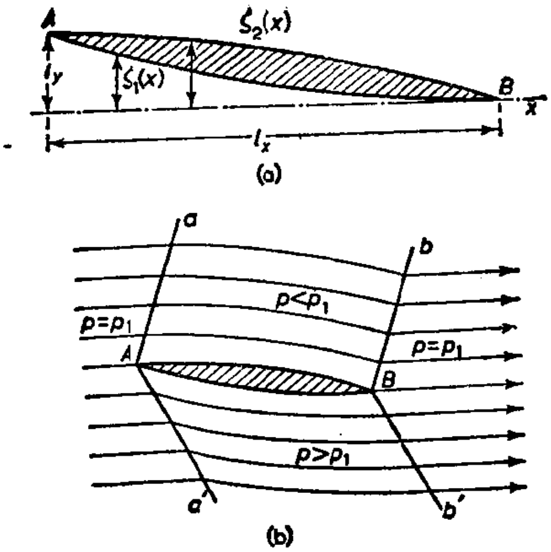


图 111

量，沿直线 $x\pm\beta y=$常数(特征线)均不变，这与 §107 的结果是一致的，刚才所求得的解是 § 107的一个特殊情形.

定性地说，流动图象如下. 从前后缘的尖端发出的是弱间断线(图 111b 中的 aAa' 和 bBb')①. 在间断线 aAa' 的前面和 bBb' 的后面，流动是均匀的；而在两者之间，流动偏转，以便顺着翼面流过，这里的流动是简单波；在目前的线性近似下，特征线都是平行的，倾角为来流的马赫角.

压力分布由下列公式 $p-p_1=-\rho_1 v_1\dfrac{\partial\phi}{\partial x}$ 给出，一般公式(106.5) 中含 v_y^2 的项在这里可以略去， 因为 v_x 和 v_y 量级相同. 将(117.3)代入上式并引进**压力系数** C_p，则上半平面的压力系数为

$$C_p=\frac{p-p_1}{\dfrac{1}{2}\rho_1 v_1{}^2}=\frac{2}{\beta}\zeta_2'(x-\beta y)\,.$$

① 这个说法只是在这里所采用的近似程度上才是正确的. 实际上，并不是弱间断，而是弱激波或狭窄的中心稀疏波，视速度被它们所折转的方向而定. 例如，对于图 111*b* 中所画出的剖面，Aa 和 Bb' 是稀疏波，而 Aa' 和 Bb 是激波.

从后缘(图 111*b* 中的 B 点)发出的流线，实际上是速度的切向间断线(它实际上变成狭窄的湍流尾迹).

特别是，在机翼的上表面，压力系数为

$$C_{p_2}=\frac{2}{\beta}\zeta_2'(x). \tag{117.4}$$

仿此可知，在下表面，压力系数为

$$C_{p_1}=-\frac{2}{\beta}\zeta_1'(x). \tag{117.5}$$

应注意，翼剖面上任何一点的压力只依赖于剖面周线在该点的斜率.

因为剖面周线与x轴的夹角总是很小，所以可将压力的垂直分量当作是压力本身，这是足够准确的. 作用在机翼上的总升力等于上下翼面的压力差. 所以升力系数为

$$C_y=\frac{1}{l_x}\int_0^{l_x}(C_{p_1}-C_{p_2})\,dx=\frac{4l_y}{\beta l_x};$$

l_x，l_y的定义见图 111. 我们定义攻角α为通过剖面端点的弦AB与x轴的夹角(图 111)，即$\alpha\approx l_y/l_x$，因而得下列简单公式:

$$C_y=\frac{4\alpha}{\sqrt{M_1^2-1}} \tag{117.6}$$

(J. 阿克莱，1925). 我们看出，升力由攻角确定，而不依赖于翼剖面的形状，这与亚声速流动情形是不同的[参看公式(48.7)].

我们接着来确定作用在机翼上的阻力(即波阻，其性质与作用在细长体上的波阻相同；参看§115). 为此，我们应取压力的x分量并沿剖面周线积分. 于是求得阻力系数为

$$C_x=\frac{2}{\beta l_x}\int_0^{l_x}(\zeta_1'^2+\zeta_2'^2)\,dx. \tag{117.7}$$

我们设

$$\zeta_1'=\theta_1-\alpha,\qquad \zeta_2'=\theta_2-\alpha,$$

这里$\theta_1(x)$和$\theta_2(x)$分别为周线上、下部分与弦AB的夹角. θ_1和θ_2的积分显然为零，因而其结果为

$$C_x=\frac{4\alpha^2+2(\bar{\theta}_1^2+\bar{\theta}_2^2)}{\sqrt{M_1^2-1}}. \tag{117.8}$$

字母上面带一横表示对于 x 的平均. 若攻角一定，则可以看出平板机翼(其 $\theta_1=\theta_2=0$)的阻力系数最小. 在这种情况下,$C_x=\alpha C_y$. 若将公式(117.8)用于粗糙表面，则粗糙度可使阻力显著增加,即使凹凸相差的高度很小①. 因为，若表面的平均斜率,即凹凸相差高度与它们之间距离之比的平均值保持不变，则阻力与凹凸相差的高度无关.

最后,我们作如下说明.这里和其它地方一样,我们所说的机翼总是指其边缘与流动方向垂直的. 把上述公式推广到任意 γ 角的情形是非常简单的,这里 γ 是流动方向与边缘的夹角(**偏航角**). 显而易见，作用在等截面无限翼展机翼上的力只依赖于来流速度垂直于机翼边缘的分量;在理想流体中,平行于边缘的速度分量不产生任何力. 在马赫数为 M_1 的气流中,作用在偏航角不等于 $\frac{\pi}{2}$ 的机翼上的力，与马赫数为 $M_1\sin\gamma$ 的气流中当 $\gamma=\frac{\pi}{2}$ 时作用在相同机翼上的力是一样的. 特别是,若 $M_1>1$, 但 $M_1\sin\gamma<1$, 则超声速流动中所特有的波阻就不会出现了.

§118. 跨声速的相似律

§115—§117 中所确立的绕薄物体的超声速和亚声速流动理论,对于跨声速流动是不适用的,因为这时势函数的线化方程不再成立了. 在这种情况下，全空间的流动图象由非线性方程(106.10)

$$2\alpha_*\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{118.1}$$

---

① 但还是大于边界层的厚度.

(或者，若是二维流动，则由等价的欧拉-特里科米方程)确定. 但是，对于具体问题，解这些方程是相当困难的. 因此，对于这样的流动，我们感兴趣的不是去寻求具体的解，而是建立起某些相似法则.

我们首先来研究二维流动. 设

$$Y=\delta f\left(\frac{x}{l}\right) \tag{118.2}$$

为被绕流的薄翼剖面周线形状的方程，l 是薄翼(沿流动方向)的长度，而 δ 是某个特征厚度($\delta \ll l$). 通过改变这两个参数 l 和 δ，可得一族相似的周线.

其运动方程为

$$2\alpha_*\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \tag{118.3}$$

其边界条件如下：在无穷远处，速度等于未受扰气流的速度 v_1，即

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=0,\ \frac{\partial \phi}{\partial x}=M_{1*}-1=\frac{M_1-1}{\alpha_x}; \tag{118.4}$$

这里势 ϕ 的定义见(106.9). 在剖面上，速度必须是切向的，即

$$\frac{v_y}{v_x}\approx\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{dY}{dX}=\frac{\delta}{l}f'\left(\frac{x}{l}\right); \tag{118.5}$$

因为剖面很薄，可令这个条件在 $y=0$ 处得到满足.

我们按下列式子引进无量纲变量：

$$x=l\bar{x},\ y=\frac{l\bar{y}}{(\theta\alpha_*)^{1/3}},\ \phi=\frac{l\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}}\bar{\phi}(\bar{x},\bar{y}); \tag{118.6}$$

这里，$\theta=\delta/l$ 表示机翼的角开度(表示厚度)或攻角. 于是

$$2\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2}=\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2},$$

其边界条件如下：

在无穷远处 $\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}}=K,\ \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{y}}=0,$

在 $\bar{y}=0$ 处 $\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\bar{y}}=f'(\bar{x}),$

这里

$$K=\frac{M_1-1}{(\alpha_*\theta)^{2/3}}, \tag{118.7}$$

这些条件中只含有一个参数K. 于是我们求得了所要求的相似律，公式(118.6)表明，具有相同K值的二维跨声速流动是相似的(C. B. 法里柯维奇，1947).

应注意，表达式(118.7)只含有一个表征气体本身性质的参数α_*. 所以，该相似律还定出了对于不同气体的相似性.

在这里所考虑的近似程度上，压力由公式 $p-p_1\approx-\rho_1 v_1(v_x-v_1)$. 给出. 利用表达式(118.6)计算，可知剖面上压力系数有以下形式:

$$C_p=\frac{p-p_1}{\frac{1}{2}\rho_1 v_1^2}=\frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*{}^{1/3}}P\left(K,\frac{x}{l}\right).$$

沿剖面的周线积分，就得出了阻力和升力系数:

$$C_x=\frac{1}{l}\oint C_p\frac{dY}{dx}dx.$$

$$C_y=\frac{1}{l}\oint C_p dx.$$

所以，其形式如下①:

---

① 这些公式的适用范围由条件$|M_1-1|\ll$所确定. 但线化理论是对应于大的K值，即$|M_1-1|\gg\theta^{2/3}$. 所以，在$1\gg M_1-1\gg\theta^{2/3}$的范围内，公式(118.8)应换成由线化理论所给出的公式(117.6)—(117.8). 即是说，K值大时，函数f_x和f_y必与$K^{-1/2}$成正比.

$$C_x=\frac{\theta^{5/3}}{\alpha_*^{1/3}}f_x(K), \quad C_y=\frac{\theta^{2/3}}{\alpha_*^{1/3}}f_y(K). \tag{118.8}$$

用完全类似的方法，可以求得三维薄物体的相似律，该物体的形状由以下形式的方程给出：

$$Y=\delta f_1\left(\frac{x}{l}\right), \qquad Z=\delta f_2\left(\frac{x}{l}\right), \tag{118.9}$$

式中有两个参数 δ 和 l ($\delta \ll l$)．三维情形与二维情形有一个重要差别，因为现在的势函数，当$y\to 0, z\to 0$时，有一个对数奇点(例如，参看 §105 中绕尖削圆锥流动的公式)．因而在 x 轴上应确定的边界条件不是导数$\frac{\partial\phi}{\partial y}$，$\frac{\partial\phi}{\partial z}$本身，而是乘积

$$y\frac{\partial\phi}{\partial y}=Y\frac{dY}{dx}, \quad z\frac{\partial\phi}{\partial z}=Z\frac{dZ}{dx},$$

这两个积保持为有限值．在这种情况下，不难看出，相似性变换为

$$x=l\bar{x}, \quad y=\frac{l}{\theta\alpha_*^{1/2}}\bar{y}, \quad z=\frac{l}{\theta\alpha_*^{1/2}}\bar{z}, \phi=l\theta^2\bar{\phi}, \tag{118.10}$$

相似性参数是

$$K=\frac{M_1-1}{\theta^2\alpha_*} \tag{118.11}$$

(T. 冯. 卡门，1947)．求得物面上压力系数的形式为

$$C_p=\theta^2 P\left(K,\frac{x}{l}\right),$$

相应地，阻力系数为①

$$C_x=\theta^4 f(K). \tag{118.12}$$

当然，当 M_1-1 为小正值和小负值时，所有这些公式都是成

① 在 $1\gg M_1-1\gg\theta^2$ 的范围内，一定会得出线化理论所给出的公式(115.6)，根据此式可知 $C_x\sim\theta^4$；这表明当 K 增大时，函数 $f(K)$ 趋于常数．

立的．若恰好是$M_1=1$，则相似性参数$K=0$，因而公式(118.8)和(118.12)中的函数化为常数．所以，这些公式完全确定了C_x和C_y与θ和α_*的函数关系，这里α_*代表气体的性质．

§119. 高超声速的相似律

在 §106 末尾早已指出：当马赫数 M_1 的值很大(**高超声速**)时，绕细或薄物体的流动不能用线化理论．因而，对于这种情形，相似律是重要的，钱学森(1946)已经建立了简单的相似律．

这样的流动，所形成的激波与流动方向夹角很小，相当于物体厚度与长度的比值 $\theta=\delta/l$ 的量级．这些激波通常是弯曲的，而且也较强；其中速度间断值比较小，但压力间断值(因而还有熵的间断值)比较大．所以，一般说来，气体流动不是势流．

我们假设马赫数 M_1 的量级为 $1/\theta$ 或更大．激波会使M的当地值减小，但总还保持 $1/\theta$ 的量级(参看 §104"问题")，所以M处处都很大．

我们利用 § 115 中所阐述的"声学比拟"：绕可变截面 $S(x)$ 薄物体定常流动的三维问题，与变剖面的周线不定常地发射声波这种二维问题等价①，而所谓变剖面是指剖面面积按 $S(v_1t)$ 的规律随时间变化；这时声速用$\frac{v_1}{\sqrt{M_1^2-1}}$表示，或若$M_1$很大，就简单地用 C_1 表示．应着重指出，为使这两个问题相互等价，所必须的唯一条件是比值 δ/l 很小；这就使我们能够把物面上很小的环形区域看作柱面．但是，当 M_1 很大时，"发射"波的传播速度与波中气体质点的速度相近(参看 §105末)，因而这个问题必须在(未线化)恰当方程的基础上加以解决．

① 例如，绕尖削圆锥流动的问题，与由均匀膨胀圆柱发射柱面波的问题是等价的．

在这个二维问题中，声源的线速度的量级为 $v_1\theta$; 此外，在该问题中，仅有的其它独立参数为声速 c_1，声源尺度 δ，以及密度 ρ_1 ①. 由这些参数只能组成唯一的无量纲组合：

$$K=\mathrm{M}_1\theta, \tag{119.1}$$

这就是相似性参数②. 作为坐标 y，z 的长度标尺以及时间标尺，必须选定一些具有适当的量纲的量，而且必须是由同样的参数例如 δ 和 $\frac{\delta}{v_1\theta}=\frac{l}{v_1}$ 所组成的. 变回到坐标 x 以后，我们得知 v/c_1 和 C_p 都是无量纲变量 $\frac{x}{l}$，$\frac{y}{\delta}$，$\frac{z}{\delta}$ 和参数 K 的函数.

容易求出薄物体具有以下形式的阻力系数：

$$C_x=\theta^4 f(K). \tag{119.2}$$

对于绕无限翼展薄翼流动的二维情形，显然也可得到同样的相似律.

最后，得到以下形式的阻力系数和升力系数：

$$C_x=\theta^3 f_x(K),C_y=\theta^2 f_y(K). \tag{119.3}$$

问　　题

设流动方向对无限翼展平板翼有一小的攻角 α，试求马赫数 M_1 很大 $\left(\mathrm{M}_1\gtrsim\frac{1}{\alpha}\right)$ 时，作用在该机翼上的升力.

解： 流动图象如图 112 所示：在平板两端的每一端，都有激波和稀疏波发出，气流通过这两种波时，先向下折转一个角度 α，然后再向上折转一个角度 α.

---

① 当然，我们考虑的不只是气体的运动方程，还有物面边界条件，以及已形成的激波上所必须满足的条件. 我们讨论的是理想气体的情形，所以气体动力学性质只依赖于无量纲参数 γ；但是，下面所求得的相似律确定不了流动对这个参数的依赖关系.

② 如果不假定 M_1 很大，我们得到的是参数 $K=\theta\sqrt{\mathrm{M}_1^2-1}$ 的相似律. 然而，这没有什么意义，因为当 M_1 不大时，线化理论确定了所有的量与这个参数的函数关系.

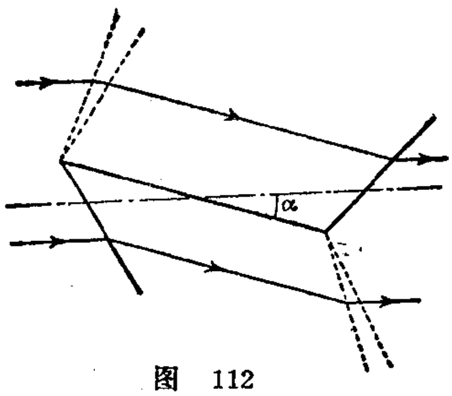


图 112

根据声学比拟，绕这样的平板的定常流动问题，与以匀速 αv_1 运动的活塞前后两面的不定常一维气体流动问题是等价的. 在活塞的前面，形成一个激波；而在活塞后面，则形成稀疏波(参看§92问题1和2). 利用那里所得的结果，我们求得所要求的升力，即平板上下两边的压力差. 升力系数为

$$C_y=\alpha^2\left[\frac{2}{\gamma K^2}+\frac{\gamma+1}{2}+\sqrt{\frac{4}{K^2}+\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^2}\right]-\frac{2\alpha^2}{\gamma K^2}\left(1-\frac{\gamma-1}{2}K\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}},$$

式中，$K=\alpha M_1$. 当 $K\geqslant\dfrac{2}{\gamma-1}$ 时，平板上面形成真空，因而第二项必须略去.

在 $1\ll M_1\ll\dfrac{1}{\alpha}$ 的范围内，这个公式变成

$$C_y=\frac{4\alpha}{M_1}.$$

与线化理论所给出的一样，这是由于在此范围内，两种处理方法都是适用的.

第十四章　燃烧的流体动力学

§ 120. 缓慢燃烧

化学反应的速率(比如说,以单位时间内发生反应的分子数来度量)依赖于发生反应的混合气体的温度，且随温度的升高而增大. 在许多情况下,这种依赖性是非常明显的①. 尽管对应于(化学)热力学平衡的混合气体是已发生过反应的,但在常温下,反应速率可能很小，以致可以认为几乎没有发生反应. 而当温度升到足够高时，反应就会进行得很快. 如果是吸热反应，为了维持反应,必需由外部热源不断地供给热量;如果仅在反应开始时达到足够高的温度，则只有少量的物质发生反应，从而使气体的温度降低,最终导致反应停止. 若是强放热反应,这时有大量的热释放出来,情况就大不相同. 此时,只需在某一点上加温就够了；由该点起始的反应将放出热量,从而提高了周围气体的温度. 于是,只要反应一旦发生,就将扩展到整个气体. 这种现象称为混合气体的**缓慢燃烧**,或者就称为**燃烧**②.

混合气体的燃烧必然伴随着气体的运动. 因此，燃烧过程不仅是一种化学现象,而且也是一种气体动力学现象. 一般说来,燃烧过程的特性必须由一组联立方程式的解来描述，该方程组包括

---

① 通常,反应速率对温度呈指数关系，约与 $e^{-U/RT}$ 形式的因子成正比，其中,U 对于一定的反应而言,是一个常数,称为活化能. U 值越大,反应速率对温度的依赖性越强.

② 必须记住,在可燃的混合气体中,燃烧在某种环境下或许是不能自然传播的. 这种限制由于这样一些使热量散失的因素，诸如,由于管内发生燃烧时通过管壁的导热,热辐射损失等等. 因此，比方说,在半径很小的管道内,燃烧是不能进行的.

有关反应的化学动力学方程和有关混合物的气体动力学方程.

但是,有一类很重要的情形(常见情形),即问题中的特征尺度 l 很大(下面将说明它的含义),此时问题将大为简化.我们将看到,在这类情形中,气体动力学问题和化学动力学问题在一定程度上可以分开处理.

已燃的气体区域(即反应已经终止,且充满燃烧生成物的混合气体的区域)和未燃气体之间由一个过渡层分开,在过渡层(燃烧带或火焰)内进行着反应,随着时间的推移,这种过渡层以某个速度向前移动,该速度称为气体燃烧的传播速度,其大小依赖于由燃烧带传向冷的混合气体传输的热量.这里传热的主要机制是通常的导热,这种方式的燃烧传播理论是由 B.A. 米海里森首先提出的(1890).

我们用 δ 来表示燃烧带宽度的量级.它由这样一个平均距离所确定,这个距离就是在反应所经历的时间 τ 内(就一个所考察的点而言),反应中释放出的热量所传播的距离,时间 τ 是反应的特征量,只依赖于燃烧气体的热力学状态(而与参数 l 无关).如果 χ 是气体的导热系数,参看式(51.7),我们有①:

$$\delta \sim \sqrt{\chi \tau}. \tag{120.1}$$

现在,把上述假设表述得更精确些:我们假定,特征尺度远大于燃烧带的宽度($l \gg \delta$).当这一条件成立时,气体动力学问题可以单独处理.在确定气体的流动时,可以略去燃烧带的宽度,而将它视为分隔燃烧生成物和未燃气体的一个界面.在这个面(火焰阵面)上,气体状态的变化不连续,即该面是一个间断面.

这一间断面相对于气体本身(在垂直于阵面的方向上)的速度

① 为了避免误解,我们应当指出:当 τ 明显地依赖于温度时,如果 τ 取燃烧生成物温度下的值时,则公式(120.1)中会有一个相当大的系数.但是,对我们的目标来说,重要的是 δ 与 l 无关.

v_1,称为火焰的法向速度. 在时间 τ 内,燃烧传播了一个量级为 δ 的距离,因此,火焰的速度为①

$$v_1 \sim \frac{\delta}{\tau} \sim \sqrt{\frac{\chi}{\tau}}. \qquad (120.2)$$

气体通常的导热系数的量级，为分子平均自由程乘以分子的热速度,或者，平均自由时间 τ_{fr} 乘以热速度的平方，这两种说法是一样的. 因为分子热速度与声速为同一量级,我们有

$$\frac{v_1}{c} \sim \sqrt{\frac{\chi}{\tau c^2}} \sim \sqrt{\frac{\tau_{fr}}{\tau}}.$$

并不是分子间的每一次碰撞都能引起它们之间的化学反应，相反地,碰撞分子中只有很小的一部分发生反应. 这就表明 $\tau_{fr} \ll \tau$,因而 $v_1 \ll c$. 于是,在这种情况下,火焰速度远远小于声速②.

和任何间断面一样,在代替燃烧带的间断面上,质量、动量和能量的通量必须是连续的. 照例，上述第一个条件就可确定气体相对于间断面的法向速度分量的比值: $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$,或者

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{V_1}{V_2}, \qquad (120.3)$$

式中,V_1 与 V_2 是未然气体与燃烧生成物的比容. 依照§81中对于任意间断面所得出的一般结果,如果法向速度分量是间断的,则切向速度分量必定是连续的. 因此,流线在间断面上将发生“折转”.

因为火焰的法向速度相对于声速为一小量，所以，动量通量的连续性条件简化为压力的连续性，而能量通量的连续性条件简化为焓的连续性:

---

① 可以举个例子: 在甲烷(6%)和空气的混合物中，火焰速度仅为 5 厘米/秒，而在爆裂的混合气体($2H_2+O_2$)中,它是 1000 厘米/秒; 燃烧带的宽度在这两种情况下分别约为 5×10^{-2} 厘米和 5×10^{-4} 厘米.

② 燃烧混合物成分的扩散,对燃烧的传播也有一定的影响,但是,这不会改变火焰速度和宽度的量级.

$$p_1=p_2, w_1=w_2. \qquad (120.4)$$

在应用这些条件时，必须记住，该问题中的间断面两侧的气体，其化学性质是不同的，因此两侧的热力学量函数关系彼此并不相同.

对于理想气体来说，$w_1=w_{01}+c_{p_1}T_1$，$w_2=w_{02}+c_{p_2}T_2$；常数项不能象单一气体那样（通过适当选取能量的零点）取为零，因为这里的 w_{01} 和 w_{02} 是不相同的. 令 $w_{01}-w_{02}=q$；如果反应在绝对零度的温度下发生，这正是反应中（每单位质量物质）放出的热量. 于是，我们得到未燃气体(1)和已燃气体(2)的诸热力学量之间的关系式如下：

$$\left.\begin{aligned} p_1=p_2, T_2=\frac{q}{c_{p_2}}+\frac{c_{p_1}}{c_{p_2}}T_1, \\ V_2=V_1\frac{\gamma_1(\gamma_2-1)}{\gamma_2(\gamma_1-1)}\left(\frac{q}{c_{p_1}T_1}+1\right). \end{aligned}\right\} \qquad (120.5)$$

因为火焰具有确定的法向速度，它与气体自身的速度无关；对于运动气体的定常燃烧来说，火焰阵面有一定的形状. 从管口流出的气体的燃烧（喷灯嘴）就是一例. 如果 v 是气体在管截面上的平均速度，显然有 $v_1S_1=vS$，其中 S 是管的截面积，S_1 是火焰阵面的总面积.

如果这种情况能够实现，则它对于小扰动必定是稳定的，因而产生这种稳定性的极限问题. 火焰阵面的稳定性可用与 § 30中切向间断面稳定性相类似的方法来研究. 因为气体速度远小于声速，因此可以将气体看成是不可压缩的理想流体，把火焰阵面的法向速度当作一个给定的常数. 从这一研究（参看问题 1）可得出火焰阵面是绝对不稳定的结论. 因此，火焰一定要变成湍流状态的（Л. Д. 朗道，1944）. 上述研究仅适用于大雷诺数的情形. 然而，当考虑气体的粘性时，就不能得出临界雷诺数非常大的结论.

另一方面，实验资料表明：直至很大的雷诺数时，也不会发生

火焰的"自动湍化"①. 这意味着，一定有其它一些因素使火焰阵面变得稳定，而使火焰的湍化一直推迟到非常大的雷诺数时才出现. 当火焰阵面变形时，法向速度的变化可能具有重要的作用：在阵面呈凹形的情况下，v_1 会增大（因为向凹处未燃混合物的传热得到改善），而当阵面呈凸形时，则 v_1 减小（Я. Б. 泽尔多维奇）. 这一重要问题尚未得到解决②.

在可燃气体混合物中传播的火焰，会引起周围相当大范围内的气体发生运动. 因为存在着 v_1 与 v_2 之间的速度差，燃烧生成物必须以速度 v_1-v_2 相对于未燃气体而运动；由此显然可知，伴随着燃烧，必然出现气体的运动. 在某些情况下，这种运动导致激波的形成. 这些激波与燃烧过程没有直接关系，它们的产生乃是由于必须满足某些边界条件. 例如，我们来研究从一个管子的封闭端传来的燃烧. 在图 113 中，ab 是燃烧带. 1 区和 3 区的气体是原来的未燃混合物，而 2 区的气体则由燃烧生成物所组成. 据上所述，燃烧带相对于它前面的气体 1 运动的速度 v_1，是由反应性质和传热条件确定的，因此，v_1 可视为已知的. 火焰相对于气体 2 的运动速度 v_2 可直接由条件(120.3)确定. 在管子的封闭端，气体速度必须等于零，这样，2 区中的气体将处于静止状态. 所以，气体 1 必须以恒定速度 v_2-v_1 相对于管道而运动. 在管道前方离火焰很远的地方，气体又是处于静止状态. 这一条件只有在出现激波（图 113 中的 cd）时才能满足，在激波面上，气体速度出现间

---

① 当燃烧在无限空间中作球形传播时，如果发生"自动湍化"，也只是在 $R\sim10^6$ 的情况下才有可能，这时，作为特征尺度的是球形火焰的半径（Я. Б. 泽尔多维奇和 A. И. 罗兹洛夫斯基，1947）. 当气体在管道中燃烧时，不会发生自动湍化；事实上，随燃烧而产生的大雷诺数气体流动，已由于管壁的作用而引起湍流了（即由于泊肃叶层流流动的不稳定而形成湍流）.

② 在由液体表面蒸发的气体的燃烧中（反应在气体自身中进行，而不是与任何外部物质，如空气中的氧，发生反应），存在一些特殊的因素使火焰变得稳定. 在这种情况下，毛细作用力和重力场具有稳定化的效应（参看问题 2）.

断，它正好使得3区气体处于静止状态．由已知的速度间断值，可以求得其它量的间断值以及激波自身的传播速度．于是，我们知道，火焰阵面对其前方的气体施加一种类似于活塞的作用．激波运动得比火焰快，所以，进入运动的气体的质量随着时间的推移而增加．

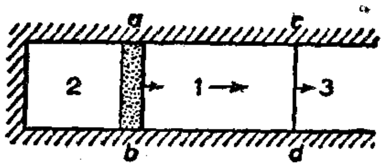


图 113

在雷诺数足够大的情况下，管道中伴随燃烧而产生的气体流动变成湍流，然后它又反过来影响引起气体运动的火焰．于是，根据K.И.谢尔金的研究，燃烧带有如下结构：尺度比普通火焰宽度δ大得多的湍流涡，导致火焰阵面的不规则弯曲．这种曲率可能是很大的，因为如上所述，火焰阵面对于变形的稳定性也许是很小的，结果产生一个较宽的燃烧带，它包括一个手风琴风箱式的不规则形状的狭窄焰面．因为燃烧的总面积显著地增大，于是燃烧的速率也大为加快．应当注意的是，这一图象和自动湍化的火焰里面出现的情况大不相同：在那种情况下，燃烧带将是一个均匀区域，在该区域中，远比管半径为小的湍流涡将促使彻底的混合．

问　　题

问题1. 试讨论(以远小于声速的速度传播的)平面火焰阵面对于无穷小扰动的稳定性．

解： 取间断平面为yz平面，让未受扰动的气体速度沿x轴的正向．假设在具有恒定速度v_1, v_2的流动上(在间断面的两侧)，叠加一个在y方向上和时间上都呈周期性的扰动．由运动方程组

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}'=0,\ \frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}'=-\frac{1}{\rho}\nabla p' \tag{1}$$

($\boldsymbol{v}, \rho$为v_1, ρ_1或v_2, ρ_2)，可象§30中一样得到方程

$$\Delta p'=0. \tag{2}$$

在间断面上(即当$x\approx 0$)，必须满足下面的条件：压力的连续条件

$$p_1'=p_2',\tag{3}$$

与间断面相切的速度分量的连续条件

$$v_{1y}'+v_1\frac{\partial\zeta}{\partial y}=v_{2y}'+v_2\frac{\partial\zeta}{\partial y},\tag{4}$$

(这里,$\zeta(y,t)$是由于扰动而引起的间断面沿 x 轴方向的小位移),以及间断面上气体的法向速度保持不变的条件

$$v_{1x}'-\frac{\partial\zeta}{\partial t}=v_{2x}'-\frac{\partial\zeta}{\partial t}=0.\tag{5}$$

在 $x<0$ 的区域内(未燃气体 1),方程(1)和(2)的解可写为

$$\left.\begin{aligned}&v_{1x}'=Ae^{iky+kx-i\omega t},\ v_{1y}'=iAe^{iky+kx-i\omega t},\\&p_1'=A\rho_1\left(\frac{i\omega}{k}-v_1\right)e^{iky+kx-i\omega t}.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

在 $x>0$ 的区域内(燃烧生成物,气体 2),除去形式为常数$\times e^{iky-kx-i\omega t}$的解以外,我们还必须考虑方程(1)和(2)的另一个特解,在此特解中,对 y 和 t 的依赖关系仍由同一因子 $e^{iky-i\omega t}$ 给出. 这个解可由取 $p'=0$ 而得;此时,欧拉方程的右边为零,于是所得的齐次方程有这样一组解,其中的 v_x' 与 v_y' 正比于 $e^{iky-i\omega t+i\omega x/v}$ 为什么只需在气体 2 中计入这种解,而在气体 1 中则不需要呢? 其理由乃是因为我们的最终目的是要确定是否可能存在具有正虚部的频率 ω;而对这种 ω,当 $x<0$时,因子 $e^{i\omega x/v}$ 将随$|x|$无限增加. 所以,这种解在 1 区中是不可能存在的. 再给常系数选取适当的值后,我们寻找 $x>0$ 的解,其形式为

$$\left.\begin{aligned}&v_{2x}'=Be^{iky-kx-i\omega}+Ce^{iky-i\omega t+i\omega x/v_2},\\&v_{2y}'=-iBe^{iky-kx-i\omega}-(\omega/kv_2)Ce^{iky-i\omega t+i\omega x/v_2},\\&p_2'=-B\rho_2[v_2+(i\omega/k)]e^{iky-kx-i\omega t}.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

并令

$$\zeta=De^{iky-i\omega t},\tag{8}$$

将这些表达式代入条件(3)—(5),我们得到关于系数 A,B,C,D 的四个齐次方程. 简单的计算(利用 $j\equiv\rho_1v_1=\rho_2v_2$ 这一事实)就可得出这些方程的下列相容性条件:

$$\Omega^2(v_1+v_2)+2\Omega kv_1v_2+k^2v_1v_2(v_1-v_2)=0,\tag{9}$$

式中,$\Omega=-i\omega$. 如果 $v_1>v_2$,这个方程或者是有两个负实根,或者是有两个具有负实部的共轭复根. 但是,如果 $v_1<v_2$,则两个根为具有相反符号的实根. 因此,如果$v_1>v_2$,则始终有 $\mathrm{Re}(\Omega)<0$,从而运动是稳定的;而当 $v_1<v_2$

时，则存在$\mathrm{Re}(\Omega)>0$的Ω，于是，原来的运动就是不稳定的.因为在燃烧过程中加热相当大，燃烧生成物的密度 ρ_2 实际上总小于未燃气体的密度 ρ_1. 这样，由于$\rho_1 v_1=\rho_2 v_2$，就有 $v_2>v_1$. 因此可以断言，在所讨论的条件下，火焰阵面总是不稳定的.

问题 2. 设燃烧在液体的表面进行，反应发生在由表面蒸发的蒸汽中. 试确定该燃烧在计及重力场和毛细作用时的稳定性(Л.Д.朗道，1944).

解: 我们将靠近液面的蒸汽中的燃烧带看成一个间断面，但现在假设这个表面具有表面张力 α. 计算方法完全类似于问题 1，唯一的区别是，这里应有$p_1'-p_2'=-\alpha\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+(\rho_1-\rho_2)g\zeta$，而不用边界条件(3)；介质 1 是液体，介质 2 是已燃气体，条件(4)和(5)不变.现在，代替方程(9)的是

$$\Omega^2(v_1+v_2)+2\Omega k v_1 v_2+\left[k^2(v_1-v_2)+\frac{gk(\rho_1-\rho_2)+\alpha k^3}{j}\right]v_1 v_2=0.$$

在这种情况下，稳定性条件是该方程的根应具有负的实部，即自由项对所有的 k 必须都是正数. 由这一必要条件得出稳定性条件 $j^4<\dfrac{4\alpha g\rho_1^2\rho_2^2}{\rho_1-\rho_2}$. 因为气体燃烧生成物的密度远小于液体的密度($\rho_1\gg\rho_2$)，故上述条件实际上变为

$$j^4<4\alpha g\rho_1\rho_2^2.$$

问题 3. 试确定平面火焰前方气体中的温度分布.

解: 在随同火焰阵面一起运动的坐标系中，温度分布是定常的，而气体以速度$-v_1$运动. 导热方程

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla T=-v_1\frac{dT}{dx}=\chi\frac{d^2T}{dx^2}.$$

的解为

$$T=T_0 e^{-v_1 x/\chi},$$

其中，T_0 是火焰阵面上的温度，远离火焰阵面的温度取为零.

§ 121. 爆轰

在上面所描述的那一类燃烧(缓慢燃烧)中，燃烧在气体中的传播归因于加热，这种加热是由燃烧气体向尚未燃烧的气体直接

传热而造成的．燃烧的传播还可能有另一种迥然不同的机制，其中包含着激波．当激波通过时，激波使气体加热；激波后面的气体温度高于其前面的温度．如果激波足够强，它所造成的温升就能够引起燃烧．于是，激波在其运动中就会“点燃”混合气体，就是说，燃烧将以激波的速度传播，或者说，它比通常的燃烧传播速度要快得多．这种燃烧传播机制称为**爆轰**.

当激波通过气体中的某一点时，该点就开始发生反应，并且一直延续到那一点的气体全部燃烧完毕为止．就是说，反应延续了一个时间 τ，它表征问题中的反应的动力学特性．由此显见，在激波后面将跟随一个与它一起运动的燃烧层，该层的宽度等于激波传播的速度乘以时间 τ．重要的是，这一宽度与流场中出现的任何物体尺度无关．所以，当所涉及的问题的特征尺度足够大时，我们可把激波以及跟随它的燃烧带，看成将已燃气体与未燃气体分隔开的单个间断面．这个间断面称为**爆轰波**.

在爆轰波前后，质量、能量和动量的通量密度必须是连续的，因此，以前只用这些连续性条件所得到的关系式(82.1)—(82.10)仍然成立．特别是，方程

$$w_1-w_2+\frac{1}{2}(V_1+V_2)(p_2-p_1)=0 \tag{121.1}$$

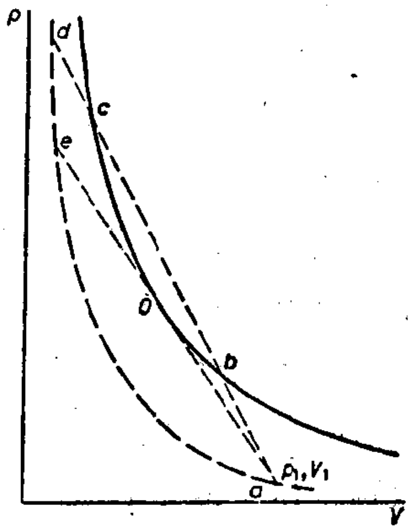


图 114

仍成立；下标 1 总是指未燃气体，而下标 2 则指燃烧生成物．由这一方程得到 p_2 作为 V_2 的函数的曲线称为**爆轰绝热线**．该曲线不通过给定的初始点 (p_1, V_1)，这与前面讨论过的激波绝热线不同．激波绝热线通过初始点是由于 w_1 和 w_2 分别是 (p_1,V_1) 与 (p_2,V_2) 的同一函数，而现在由于

两种气体的化学性质不同，情形便迥然不同了. 在图 114 中，实线表示爆轰绝热线. 过点(p_1, V_1)所引的曲线(虚线) 是未然混合气体的普通激波绝热线，爆轰绝热线总是处于激波绝热线的上方，因为燃烧时会出现高温，因而气体压力要大于同样比容下未燃气体的压力.

对于质量通量密度来说，前面的公式(82.6)仍成立，即:

$$j^2=\frac{p_2-p_1}{V_1-V_2}, \tag{121.2}$$

所以，j^2 仍然是图形上从点(p_1, V_1)到爆轰绝热线上任一点(p_2, V_2)的弦线(例如，图 114 中的 ac 弦) 的斜率. 从图解上立即可以看出，j^2 不能小于切线 aO 的斜率. 通量 j 恰好是单位面积的爆轰波表面在单位时间内所点燃的气体质量. 我们可以看出，在爆轰中，这个量不能小于某个极限值 $j_{\min}$(它取决于未燃气体的初始状态).

公式(121.2)只是质量通量和动量通量连续条件的一个推论，因此，(对于给定的气体初始状态来说，)这公式不仅对燃烧生成物的最终状态成立，而且对所有中间状态也成立. 而在这些中间状态下，只有一部分反应能量已被释放出来. 换句话说，在任何状态下，气体的压力 p 和比容 V 服从线性关系:

$$p=p_1+j^2(V_1-V), \tag{121.3}$$

它在图上以弦 ad 表示. 这一结果在爆轰理论中是重要的; B. A. 米海里森(1890)最先表述了这一结果.

现在，我们用 Я. Б. 泽尔多维奇(1940)提出的方法，来研究穿过有限宽度的实际爆轰波层时气体状态的变化. 爆轰波的前沿是未燃气体 1 中一个真正的激波. 在激波中，气体被压缩和加热到气体 1 的激波绝热线上点 d 所代表的状态 (图 114). 在压缩气体中开始发生化学反应，当反应进行时，气体状态就由一个沿弦 da

向下移动的点表示;这时将放出热量,并使气体膨胀,压力下降.这一过程一直延续到燃烧完毕,且反应热被全部释出为止.对应的点是 c,它落在爆轰绝热线上,表示燃烧生成物的终态.弦 ad 和爆轰绝热线的较低的交点是 b,对于由激波压缩和加热而引起燃烧的气体来说,b 点是不能达到的①.

于是,我们断定,爆轰不是由整个爆轰绝热线表示,而是仅由位于 O 点以上的那一部分表示的.在 O 点上,从初始点 a 引出的直线 aO 与爆轰绝热线相切.

§84 中曾经证明,在 $d(j^2)/dp_2=0$ 的那一点上,即在激波绝热线与从 (p_1, V_1) 引出的直线相切的点上,速度 v_2 等于相应点的声速 c_2,而在该点以上则有 $v_2<c_2$.这些结果只是由间断面上的守恒律得出的,因而对爆轰波也完全适用.在单一气体的普通激波绝热线上,如§84 中已经证明过的,并不存在 $d(j^2)/dp_2=0$ 的点.但在爆轰绝热线上却存在这样的点,即点 O.因为爆轰只对应于绝热线的 O 点以上的那一部分,于是可以断定

$$v_2 \leqslant c_2, \tag{121.4}$$

就是说,爆轰波相对于紧接其后方的气体,以等于或小于声速的速度而运动.当爆轰对应于点 O(称为**儒盖特点**)时,等式 $v_2=c_2$ 成立②.

爆轰波相对于气体 1 的速度总是超声速的(即使对于点 O):

$$v_1>c_1. \tag{121.5}$$

从图 114 就可一目了然地证实这一点.在图上,声速 c_1 由气体 1 的激波绝热线(虚线)过点 a 的切线斜率确定.另一方面,速度 v_1

---

① 为完整起见,还应指出,在另一个激波中,以间断的形式从状态 c 过渡到状态 b 也是不可能的,因为气体通过这一激波时,必须由高压过渡到低压.

② 应当记住,速度 v_1, v_2 总是表示垂直于间断面的速度.

由弦ac的斜率确定．因为所涉及的所有弦线都比切线陡，因而总是有$v_1>c_1$．如同激波一样，以超声速的速度运动的爆轰波，不会影响到波前方的气体．爆轰波相对于静止未燃气体而运动时的速度v_1，就是爆轰的传播速度．

既然$v_1/V_1=v_2/V_2\equiv j$，而且$V_1>V_2$，可知$v_1>v_2$，差值v_1-v_2显然是燃烧生成物相对于未燃气体而运动的速度．这个差值为正数，即燃烧生成物沿爆轰波传播的方向运动．

我们还可以作如下的说明．在§84中已经证明$ds_2/d(j^2)>0$，所以，在j^2取极小值的点上，s_2也取极小值．这个点就是点O．因此，我们断定，它对应于爆轰绝热线上熵s_2的最小值．如果我们考察状态沿直线ae的变化，则熵s_2在点O也有一个极值（因为曲线的斜率和O点切线的斜率相同）．但是，这个极值是一个极大值．因为从e到O的位移对应于压缩气体中发生燃烧反应时状态的变化，这一过程伴随有热量的释放和熵的增加；然而，从点O过渡到点a，则对应于燃烧生成物变为原气体的吸热变化，这一变化伴随有熵的减小．

如果爆轰是由外源所产生而后入射到气体中来的激波所引起的，那么，爆轰绝热线上部的任何一点都可能对应于爆轰．但是，我们尤感兴趣的，是研究由燃烧过程自身产生的爆轰．在§122中，我们将会看到，在许多重要情况下，这种爆轰必定对应于儒盖特点．这样，爆轰波相对于紧接波后的燃烧生成物的速度，就恰好等于声速；而相对于未燃气体的速度$v_1=jV_1$，则具有最小可能值．这一结果，本来是D.L.恰普曼(1899)和E.儒盖特(1905)作为假设提出来的，但其完整的理论证明则是由Я.Б.泽尔多维奇(1940)完成的．

现在来推导理想气体爆轰波中各种量之间的某些关系式．在一般方程(121.1)中，代入关于焓的下列表达式：

$$w=w_0+c_pT=w_0+\frac{\gamma pV}{\gamma-1},$$

我们得到

$$\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}p_2V_2-\frac{\gamma_1+1}{\gamma_1-1}p_1V_1-V_1p_2+V_2p_1=2q, \tag{121.6}$$

式中，$q=w_{01}-w_{02}$ 仍表示温度降到绝对零度时的反应热．该方程给出的曲线 $p_2(V_2)$ 是一支直角双曲线．当 $p_2/p_1\to\infty$ 时，密度比趋于有限大的极限：

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1},$$

这是爆轰波中所能达到的最大压缩．

在强爆轰波这种重要情况下，公式可以大大简化；当反应中所释放的热远大于原气体的内能时，即 $q\gg c_{v_1}T_1$ 时，就可得到这样的强爆轰波．此时，我们可以略去(121.6)中含 p_1 的诸项，结果得到

$$p_2\left(\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2-1}V_2-V_1\right)=2q. \tag{121.7}$$

现在较详细地讨论儒盖特点所对应的爆轰，从上面的讨论可知，这是我们感兴趣的问题．在这一点上，有 $j^2=c_2^2/V_2^2=\gamma_2p_2/V_2$．由这个关系式和式(121.2)，我们可以将 p_2 和 V_2 表示为下面的形式：

$$p_2=\frac{p_1+j^2V_1}{\gamma_2+1},\qquad V_2=\frac{\gamma_2(p_1+j^2V_1)}{j^2(\gamma_2+1)}. \tag{121.8}$$

将这些表达式代入方程(121.6)，并以 v_1/V_1 代替 j，经过简单整理后，不难得到 v_1 的下列四次方程：

$$v_1^4-2v_1^2[(\gamma_2^2-1)q+(\gamma_2^2-\gamma_1)c_{v_1}T_1]$$
$$+\gamma_2^2(\gamma_1-1)^2c_{v_1}^2T_1^2=0,$$

其中，温度是由关系式

$$T=\frac{pV}{c_p-c_v}=\frac{pV}{c_v(\gamma-1)}$$

引进的．于是①

$$v_1=\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma_2-1)[(\gamma_2+1)q+(\gamma_1+\gamma_2)c_{v_1}T_1]}$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma_2+1)[(\gamma_2-1)q+(\gamma_2-\gamma_1)c_{v_1}T_1]}. \quad (121.9)$$

用这一公式可由原混合气体的温度 T_1 确定爆轰的传播速度.

我们可以将公式(121.8)改写成下列形式:

$$\left.\begin{aligned}\frac{p_2}{p_1}&=\frac{v_1^2+(\gamma_1-1)c_{v_1}T_1}{(\gamma_2+1)(\gamma_1-1)c_{v_1}T_1},\\ \frac{V_2}{V_1}&=\frac{\gamma_2[v_1^2+(\gamma_1-1)c_{v_1}T_1]}{(\gamma_2+1)v_1^2}.\end{aligned}\right\} \quad (121.10)$$

这两个公式与(121.9)一起，可确定燃烧生成物与温度为 T_1 的未燃气体之间的压力比和密度比.

利用公式(121.9)和(121.10)，速度 v_2 可由式 $v_2=v_1V_2/V_1$ 计算．其结果为

$$v_2=\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma_2-1)[(\gamma_2+1)q+(\gamma_1+\gamma_2)c_{v_1}T_1]}$$

$$+\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma_2+1)[(\gamma_2-1)q+(\gamma_2-\gamma_1)c_{v_1}T_1]}. \quad (121.11)$$

差值 v_1-v_2，亦即燃烧生成物相对于未燃气体的速度，等于

$$v_1-v_2=\sqrt{2[(\gamma_2-1)q+(\gamma_2-\gamma_1)c_{v_1}T_1]/(\gamma_2+1)}. \quad (121.12)$$

---

① 如果 $x^4-2px^2+q=0$，则

$$x=\sqrt{p\pm\sqrt{p^2-q}}=\sqrt{\frac{1}{2}(p+\sqrt{q})}\pm\sqrt{\frac{1}{2}(p-\sqrt{q})}.$$

这里的两个符号对应于：从点 a 可以引两条爆轰绝热线的切线，一条向上，如图 114 中所示；另一条则向下．我们感兴趣的是那条向上的较陡的切线，因此，我们相应地取正号.

燃烧生成物的温度可由公式

$$c_{v_2}T_2=v_2^2/\gamma_2(\gamma_2-1) \tag{121.13}$$

算出(因为 $v_2=c_2$).

所有这些稍稍复杂的公式,在强爆轰波情况下都可大为简化.在这种情况下,速度由下列的简单公式确定:

$$v_1=\sqrt{2(\gamma_2^2-1)q},\ v_1-v_2=v_1/(\gamma_2+1). \tag{121.14}$$

燃烧生成物的热力学状态由下列公式确定:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{V_2}{V_1}=\frac{\gamma_2}{\gamma_2+1},\ T_2=\frac{2\gamma_2 q}{c_{v_2}(\gamma_2+1)},\\&\frac{p_2}{p_1}=\frac{2(\gamma_2-1)q}{(\gamma_1-1)c_{v_1}T_1}=\frac{\gamma_1 v_1^2}{(\gamma_2+1)c_1^2}.\end{aligned}\right\} \tag{121.15}$$

如果将公式(121.15)和对应的缓慢燃烧公式(120.5)作一比较,我们就会注意到,在 $q\gg c_{v_1}T_1$ 的极限情形下,爆轰和缓慢燃烧以后的生成物之间温度的比值为

$$\frac{T_{2爆}}{T_{2燃}}=\frac{2\gamma_2^2}{\gamma_2+1}.$$

这一比值恒大于1(因为 $\gamma_2>1$).

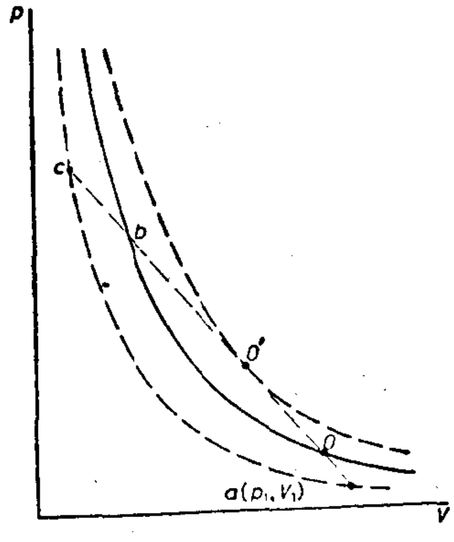


图 115

在上面所有基于图114的推论中,都不言而喻地假设燃烧的化学反应自始至终(即在所有介于原未燃气体与最终燃烧生成物之间的中间阶段)都是放热的.在大多数情况下,这一假设是合理的.但是,从原则上说,开始放热而最后阶段吸热的反应是可能存在的(Я.Б.泽尔道维奇和S.B.拉特涅尔,1941).于是,首先成为吸热而不是放热的那个中间混合物,就对应于这样一条绝热线,它处于最终燃烧生成物状态所对应的爆轰绝热线的上

方(图115).

表示爆轰混合物状态变化的任何弦线，必须通过这条中间绝热线，所以，对应于燃烧传播速度最小可能值的 j_{min} 就由切线 aO' 的斜率确定. 具有 $j>j_{min}$ 的爆轰波，对应于爆轰绝热线上位于 b 点上方的诸点，而且 $v_2<c_2$. 如果 $j=j_{min}$，气体状态就沿着直线 oa 从点 c 变到点 O'，然后进一步下移到点 O，此点代替通常的儒盖特点而成为自动爆轰所对应的点；这里与通常结果不同的是 $v_2>c_2$.

问　题

设激波是一个对应于儒盖特点的强爆轰波的前阵面，试确定紧接激波后方气体的热力学量.

解: 紧接激波后方的是未燃气体，它的状态由点 e 表示，在该点，所引切线 aO(图 114)与画成虚线的气体 1 的激波绝热线相交. 把这个点的坐标表示为 (p_1', V_1')，由气体 1 的激波绝热线方程(85.1)，我们首先得到

$$\frac{V_1'}{V_1}=\frac{(\gamma_1+1)p_1+(\gamma_1-1)p_1'}{(\gamma_1-1)p_1+(\gamma_1+1)p_1'},$$

其次有 $(p_1'-p_1)(V_1-V_1')=j^2=v_1^2/V_1^2$. 从(121.14)式取 v_1 的值，即得

$$p_1'=p_1\frac{4(\gamma_2^2-1)q}{(\gamma_1^2-1)c_{v_1}T_1},\quad V_1'=V_1\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1},$$

$$T_1'=\frac{q}{c_{v_1}}\frac{4(\gamma_2^2-1)}{(\gamma_1+1)^2}.$$

压力 p_1' 对爆轰波后方压力 p_2 的比值为

$$\frac{p_1'}{p_2}=\frac{2(\gamma_2+1)}{\gamma_1+1}.$$

§122. 爆轰波的传播

现在来研究在原先静止的气体中爆轰波传播的一些实际情况. 首先研究气体在一端($x=0$)封闭的管道中发生爆轰的情形. 这种情形的边界条件是，在爆轰波(它不影响波前气体的状态)的

前方和管道的封闭端，气体的速度均为零．因为当激波通过时，气体得到一个非零的速度，所以在爆轰波与管道封闭端之间的区域，气体的速度一定要减小．为了确定所形成的流动图象，我们要指出，在这种情况下，不存在用以表征沿管道（x 方向）流动条件的长度参数．在 § 92 中已经知道，在这种情况下，气体速度能在激波（分隔两个速度均匀的区域）中或在自相似性的稀疏波中变化．

首先，我们假设爆轰波不对应于绝热线上的儒盖特点，于是，爆轰波相对于其后方气体而传播的速度为 $v_2 < c_2$．容易看出，在这种情形下，跟随爆轰波的既不可能是激波，也不可能是弱间断（稀疏波的前阵面）．因为激波必须相对于前面的气体以超过 c_2 的速度运动，而弱间断则以等于 c_2 的速度运动，于是二者都会赶过爆轰波．因此，在上述假设下，在爆轰波后方运动的气体的速度不可能减小，即 $x=0$ 处的边界条件不可能得到满足．

这一条件，只有在对应于儒盖特点的爆轰波上才能得到满足．那时，$v_2=c_2$，于是跟随在爆轰波后面的是稀疏波．这稀疏波是当爆轰开始时，在 $x=0$ 处形成的，它的前阵面与爆轰波重合．

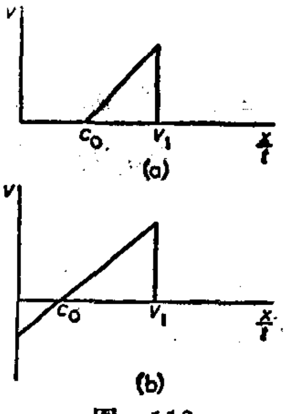


图 116

于是，我们得出一个重要的结果：在管道封闭端点火的气体中沿管道传播的爆轰波，一定对应于儒盖特点．相对于紧随在波后的气体而言，爆轰波以等于当地声速的速度运动．爆轰波与稀疏波相连接，而在稀疏波中，气体速度（相对于管道）单调地下降到零．速度变为零的点为一弱间断．弱间断后方的气体处于静止状态（图 116 a）．

现在来研究由管道的一个开口端向前传播的爆轰波．在爆轰

波前面的气体的压力必定等于原来的压力，这个压力显然等于外界压力. 显而易见，在这种情况下，在爆轰波后面的某个地方，速度必将减小. 假如在管端与爆轰波之间气体速度不变，结果气体将会从管外被吸到管道的开口端；但这是不可能的，由于爆轰波中的压力增大，从而管内的气体压力应当会大于外界的压力. 根据与前面情况相同的理由，爆轰波必须对应于儒盖特点，所形成的流动图象已在图 116b 中用图解的方式表示出来. 紧接爆轰波之后的，是具有自相似性的稀疏波，稀疏波中的速度朝管端的方向单调地下降，并在某一点上改变符号. 这表明，在管端附近的气体向开口端运动，并流出管道；气体离开管道的速度等于当地声速，而它的压力则大于外界压力. 在 § 90 中已经看到，这种流动是可能的.

下面我们来研究球对称的出射爆轰波，它的中心是气体最初着火点（Я. Б. 泽尔道维奇，1942）. 因为在爆轰波前方和中心附近，气体都必须处于静止状态，所以，气体速度一定是从爆轰波向中心方向减小的. 与管道中的流动一样，这里不存在具有长度量纲的特征参数. 所以，其结果必然形成自相似的流动，只不过是坐标 x 要改为从中心起算的距离 r. 这样，所有的量都只是比值 r/t 的函数.

若是中心对称的流动（$v_r=v(r,t), v_\theta=v_\phi=0$），其运动方程组如下. 连续方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial r}+\frac{2\rho v}{r}=0;$$

欧拉方程为

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},$$

而熵守恒方程则为

$$\frac{\partial s}{\partial t}+v\frac{\partial s}{\partial r}=0.$$

引用变量 $\xi = r/t(>0)$，并假设所有的量都只是 ξ 的函数，就得到

$$(\xi-v)\rho'/\rho = v' + 2v/\xi, \qquad (122.1)$$

$$(\xi-v)v' = p'/\rho, \qquad (122.2)$$

$$(\xi-v)s' = 0, \qquad (122.3)$$

其中带撇的量表示对 ξ 的导数. 我们不可能得出 $v=\xi$，因为这和第一个方程相矛盾. 所以，由第三个方程得知 $s'=0$，即 s =常数. 于是，我们可以写出

$$p' = (\partial p/\partial \rho)_s \rho' = c^2 \rho',$$

而方程(122.2)变为

$$(\xi-v)v' = c^2\rho'/\rho. \qquad (122.4)$$

把(122.1)式中的 ρ'/ρ 代入上式，得到关系式

$$\left[\frac{(\xi-v)^2}{c^2}-1\right]v' = \frac{2v}{\xi}. \qquad (122.5)$$

方程(122.4)和(122.5)不可能用解析的方法积分，但这两方程的解的性质还是可以研究的.

下面我们即将知道，有上述类型气体流动的区域是以两个球面为边界的；其中，外球面是爆轰波波面本身，内球面则是一个气体速度为零的弱间断面.

首先来检验在 v 等于零的点附近解的性质. 容易看出，在 $v=0$ 的点上，也有 $\xi=c$：

$$v=0, \xi=c. \qquad (122.6)$$

因为当 v 趋于零时，$\ln v \to -\infty$；所以，当 ξ 减小到问题中内边界所对应的值时，$d\ln v/d\xi$ 必须趋于 $+\infty$. 但是，根据(122.5)，当 $v=0$ 时有

$$\frac{d\ln v}{d\xi} = \frac{2c^2}{\xi(\xi^2-v^2)}.$$

此表达式只有当 $\xi \to c$ 时才能趋于 $+\infty$.

由于对称性，在原点的径向速度必须为零. 因此，围绕原点有一个静止气体区；这就是 $\xi=c_0$ 球面内部的区域，其中 c_0 是 $v=0$ 点的声速.

现在求式(122.6)中点附近函数$v(\xi)$的性质. 由式(122.5)有

$$v\frac{d\xi}{dv}=\frac{1}{2}\xi\left[\frac{(\xi-v)^2}{c^2}-1\right].$$

就一阶量（例如 v，$\xi-c_0$ 和 $c-c_0$）而言，经简单计算后可得 $v\dfrac{d}{dv}(\xi-c_0)=(\xi-c_0)-(v+c-c_0)$. 根据式(95.1)，我们有 $v+c-c_0=\alpha_0 v$，式中 α_0 为一正常数，即$v=0$时，式(95.2)的值. 于是，我们得到下面关于 $\xi-c_0$ 作为 v 的函数的一阶线性微分方程：

$$v\frac{d}{dv}(\xi-c_0)-(\xi-c_0)=-\alpha_0 v.$$

这个方程的解为

$$\xi-c_0=\alpha_0 v\ln\left(\frac{常数}{v}\right). \qquad (122.7)$$

它以隐函数的形式给出了 $v=0$ 点附近的函数 $v(\xi)$.

我们看出，内边界是一个弱间断面：速度连续地趋近于零. $v(\xi)$的曲线在这个点有一条水平切线($dv/d\xi=0$). 这里的弱间断是异乎寻常的：一阶导数连续，而所有的高阶导数都是无限大[由式(122.7)不难看出]. $v=0$ 处的比值 r/t 显然就是边界相对于气体的运动速度；根据(122.6)式，它等于当地声速，这正是弱间断的速度.

根据式(122.7)，在 v 很小时还可得到

$$\begin{aligned}\xi-v-c&=(\xi-c_0)-(v+c-c_0)\\&=\alpha_0 v[\ln(常数/v)-1].\end{aligned}$$

v 很小时，这个量是正值，即 $\xi-v-c>0$. 我们将证明，差值($\xi-$

v)$-c$ 在所讨论流场的任何点上都不能变号. 我们来考察某个点(如果存在的话),在该处,

$$\xi-v=c, v\neq 0. \tag{122.8}$$

从式(122.5)可知,导数 v' 在该点必为无限大,即

$$\frac{d\xi}{dv}=0. \tag{122.9}$$

经过简单的计算(利用条件(122.8)和(122.9)),可以证明二阶导数 $d^2\xi/dv^2$ 为 $d^2\xi/dv^2=-\alpha_0\xi/c_0v$,它不等于零. 这表明,$\xi$ 作为 v 的函数在所讨论的点上取极大值. 于是,函数 $v(\xi)$ 只能在 ξ 小于条件(122.8)所对应的值时才能存在,因而此值就是所讨论区域的另一个边界. 因为 $\xi-v-c$ 只能在区域的边界上为零,并且 v 值很小时,$\xi-v-c>0$,故可断定在区域内部处处有

$$\xi-v>c. \tag{122.10}$$

现在容易看出,所讨论流动区域的外边界,事实上必定是满足条件(122.8)的点. 为了看出这一点,我们要指出,差值 $r/t-v$(其中的 r 是边界的坐标)恰是边界面相对于其后方气体的速度.然而,$r/t-v>c$ 的曲面不可能是爆轰波波面(这里必须有$r/t-v\leqslant c$). 所以,我们得出结论:所论区域的外边界只可能是满足式(122.8)的点. 在这个边界面上,v 不连续地下降到零,而边界面相对于紧接其后方的气体的速度等于当地声速. 这表明爆轰波一定对应于爆轰绝热线上的儒盖特点①.

于是,我们得到下述爆轰的球形传播的流动图象. 与管道中的爆轰相同,球形爆轰波一定对应于儒盖特点. 紧邻爆轰波后方的是一自相似的球面稀疏波,在稀疏波中气体速度下降到零. 下降是单调的,因为按照式(122.5),导数 $dv/d\xi$ 只能在 $v=0$ 时变为

---

① 为完整起见,我们指出,$v=$常数不是中心对称的运动方程的解,因此,爆轰波后面不可能为一均匀速度区域.

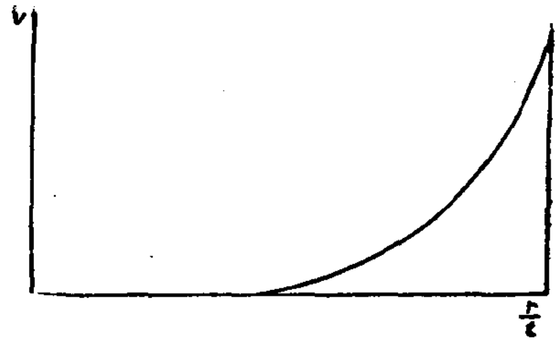


图 117

零．气体的压力和密度也是单调下降的，因为按照式(122.4)和(122.10)，导数 p' 和 v' 总是具有相同的符号．表示 v 对 r/t 的函数关系的那条曲线，在外边界上有垂直的切线[按式(122.9)]，而在内边界上则有水平的切线(图117)．内边界为一弱间断面，在该间断面附近，v 对 r/t 的依赖关系由方程(122.7)给出．在以弱间断为边界的球内，气体处于静止状态．但是，静止气体的总质量是很小的(参看§99末的说明)．

因此，在已经讨论过的自动爆轰一维传播的所有典型情况，爆轰波后方区域的边界条件给出了唯一的爆轰速度，这速度对应于儒盖特点(按照§121中的论证，该点以下的整个爆轰绝热线应予除外)．在等截面管道中，如要实现对应于儒盖特点以上那部分绝热线的爆轰①，需要借助于以超声速运动的活塞，对燃烧生成物作人为的压缩(参看问题3)．

但是，应当强调指出，这些结论并不是普遍适用的，在有些情况下，过压爆轰波会在爆轰的传播当中自动地发生．特别是当普通爆轰波由较粗的管道进入较细的管道时，会形成过压爆轰波(Б. В. 艾瓦佐夫和 Я. Б. 泽尔道维奇，1947)．产生这种现象的原因是，当爆轰波到达管道的收缩部位时，它的一部分被反射，因而，

① 这种爆轰波有时称为"过压爆轰"，因为其中的气体被压缩到比对应于儒盖特点的"正常"爆轰波是有更高的压力．

从粗管向细管运动的燃烧生成物，其压力将大大增加(参看“问题4”).

以上，我们完全略去了伴随爆轰波传播而产生的热损失. 如象缓慢燃烧中那样，这些热损失会使爆轰无法传播. 在管道里的气体爆轰中，热损失的原因，主要是热量通过管壁的迁移以及由摩擦所产生的气体阻滞. 由细长炸药棒爆炸所产生的爆轰，则主要受燃烧生成物的弥散所限：当棒与燃烧带的宽度相比显得太细时，一部分物质在反应发生前就弥散开来，从而使爆轰的传播成为不可能(Ю. Б. 哈里顿，1940).

在接近爆轰可以传播的极限条件下，人们观察到一种所谓**螺旋爆炸**的罕见现象. 根据 К. И. 谢尔金的研究，螺旋爆轰中沿管道传播的激波不再是轴对称(通常接近于平面)型的，而是随着激波沿管道移动，它还绕着管轴旋转. 当气体通过激波时，点火主要发生在激波阵面上一个偏心的且螺旋式地移动着的曲线上. 螺旋爆轰至今还没有定量的理论①.

问　题

问题 1. 设爆轰波从管道封闭端沿管道传播，试确定此时气体的流动.

解： 设爆轰波相对于波前的静止气体的速度为 v_1，其相对于紧接波后的已燃气体的速度为 v_2，这两个速度，可借助于公式(121.11)和(121.12)，以温度 T_1 表示. v_1 也是波相对于管道的速度，所以，波的坐标是 $x=v_1t$. 爆轰波面上的燃烧生成物(相对于管道)的速度是 v_1-v_2. 速度 v_2 等于当地声速. 因为自相似稀疏波中声速与气体速度 v 的关系为

$$c=c_0+\frac{1}{2}(\gamma-1)v,$$

我们有

① Я. Б. 泽尔道维奇曾作定性的讨论 (参看 *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de L'URSS*, **52**, 147, 1946).

$$v_2 = c_0 + \frac{1}{2}(\gamma_2 - 1)(v_1 - v_2),$$

因此得

$$c_0 = \frac{1}{2}(\gamma_2 + 1)v_2 - \frac{1}{2}(\gamma_2 - 1)v_1.$$

又由(121.14)式，而知强爆轰波的 c_0 不过是

$$c_0 = \frac{1}{2}v_1.$$

量 c_0 是稀疏波后边界的速度．在两个边界之间，速度线性地变化(图 116a)．

问题 2. 与问题 1相同，但管道的一端改为开口端．

解： 速度 v_1 和 v_2 的求法与上题一样，所以 c_0 也相同．但是，现在稀疏波不是扩展到 $v=0$ 的点，而是延伸到管端($x=0$，图 116b)．由公式(92.5)，$x/t = v+c$，可以看出气体以等于当地声速的速度 $v=-c$ 流出管道的开口端．

令 $-v = c = c_0 + \frac{1}{2}(\gamma_2 - 1)v$，于是，求得气体的流出速度为

$$[-v]_{x=0} = \frac{2c_0}{\gamma_2 + 1}.$$

强爆轰波的这一速度为 $v_1/(\gamma_2+1)$．

问题 3. 与问题 1 相同，但管道的封闭端是一个以恒定速度 U 开始向前运动的活塞．

解： 如果 $U < v_1$，气体中速度分布的形状如图 118a 所示．气体速度从 $x/t = v_1$ 处的 $v_1 - v_2$，减小到 $x/t = c_0 + (\gamma+1)U/2$ 处的 U，c_0 的值和前面相同．然后跟随着一个气体以均匀速度 U 运动的区域．

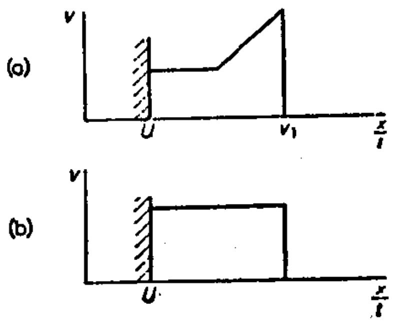


图 118

但是，如果 $U > v_1$，爆轰波就不可能对应于儒盖特点(因为那时活塞将赶过它)．在这种情况下，出现过压爆轰波，它对应于绝热线上儒盖特点上方的某个点．该点可由下述事实来确定，即爆轰波中的速度间断必须等于活塞速度：$v_1 - v_2 = U$．在爆轰波与活塞之间的整个区域内，气体以均匀的速度 U 运动(图 118b)．

问题 4. 设有一完全刚性的壁面，当垂直入射的强平面爆轰波从壁面上反射时，试确定壁面上的压力(K. П. 斯坦纽柯维奇，1946)．

解：当爆轰波入射到壁面上时，就形成一个反射激波，并沿着相反方向在燃烧生成物中传播．本问题的计算完全类似于§93中的问题1．使用相同的符号，我们得到三个关系式：

$$p_2(V_1-V_2)=(p_3-p_2)(V_2-V_3),$$

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\gamma_2}{\gamma_2+1},$$

$$\frac{V_3}{V_2}=\frac{(\gamma_2+1)p_2+(\gamma_2-1)p_3}{(\gamma_2-1)p_2+(\gamma_2+1)p_3};$$

这里，p_1 比 p_2 小得多，故略去 p_1，但 p_2 和 p_3 属于同一量级．消去比容，得到 p_3 的二次方程，并取大于 p_2 的那个正根，便有

$$\frac{p_3}{p_2}=\frac{5\gamma_2+1+\sqrt{17\gamma_2^2+3\gamma_2+1}}{4\gamma_2}.$$

应当指出，这个量与 γ_2 几乎无关，当 γ_2 从1变到∞时，它从2.6变化到2.3.

§ 123. 不同燃烧方式之间的关系

§121中已经指出：爆轰对应于燃烧过程的爆轰绝热线上部的一些点．因为绝热线方程只是质量、动量和能量守恒定律(应用于燃烧气体的初态和终态)的结果，这就清楚地表明，对于任何可以将燃烧带看成是某种间断面的其它燃烧方式来说，表示反应生成物状态的点一定落在同一条曲线上．现在，我们来说明曲线其余部分的物理意义．

过点(p_1, V_1)(图119上的点1)引竖直和水平直线 $1A$ 和 $1A'$，又作绝热线的两条切线$1O$和$1O'$．这些直线与曲线的交点或切点 A，A'，O，O'，将绝热线分为五部分．我们已经说过，O 点以上的部分对应于爆轰．现在研究曲线的其它部分．

首先，容易看出，线段 AA' 没有物理意义，因为在该线段上，$p_2>p_1$，$V_2>V_1$，从而使质量通量

$$j=\sqrt{\frac{p_2-p_1}{V_1-V_2}}$$

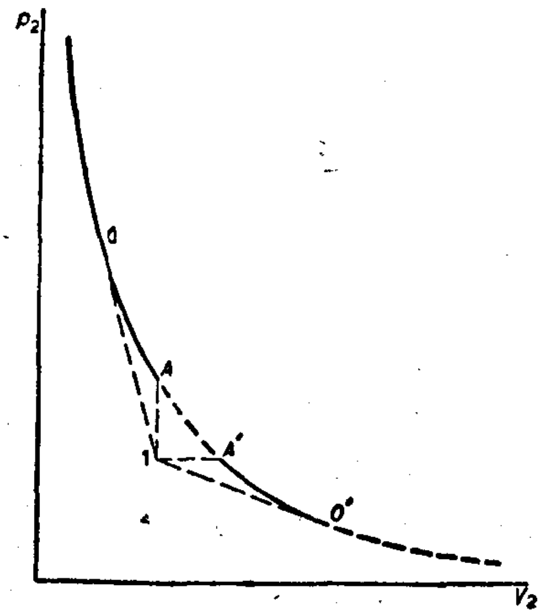


图 119

成为虚数.

在接触点 O 和 O' 上，导数 $d(j^2)/dp_2$ 为零;在§84 中已经证明,在这样的点上,$v_2/c_2=1$,且 $d(v_2/c_2)/dp_2<0$. 由此可见,在接触点的上方,$v_2/c_2<1$,而在其下方，则有 $v_2/c_2>1$. 采用§121 中对 O 点上部曲线那样的做法,考察一下对应的弦线与切线的斜率,容易得出 v_1 与 c_1 之间的关系. 结果，对于绝热线的不同曲线段有下列不等式成立:

$$\left.\begin{array}{ll} O\text{ 点以上部分} & v_1>c_1, v_2<c_2, \\ \text{在 } AO \text{ 上} & v_1>c_1, v_2>c_2, \\ \text{在 } A'O' \text{ 上} & v_1<c_1, v_2<c_2, \\ O'\text{ 点以下部分} & v_1<c_1, v_2>c_2. \end{array}\right\} \qquad (123.1)$$

在点 O 与 O' 上，$v_2=c_2$. 当趋于点 A 时，通量 j 趋于无限大，因而速度 v_1, v_2 也趋于无限大. 但是，当趋于点 A' 时,j 和速度 v_1, v_2 均趋于零.

在§84 中，我们曾研究过激波相对于其平面垂直方向上的无限小位移的稳定性. 已经知道，这种稳定性依赖于确定扰动的参

数个数与扰动在间断面上所须满足的边界条件个数之间的关系.

所有这些研究，都可以应用到这里所讨论的间断面上，特别是§84中，图47表示的关于扰动参数个数的计算，对式(123.1)的每一种情况依然是适用的. 唯一的差别是：在不出现爆轰的燃烧中，传播速度仅由化学反应的性质以及从燃烧带向其前方冷气体传热的条件确定. 这就表明，通过燃烧带的质量通量 j 是一个给定的量(更准确地说，是未燃气体1的状态的给定函数)，而在激波或爆轰波中，j 却可以为任何值. 由此可知，在不出现爆轰的燃烧带间断面上，边界条件的个数比激波上多一个，即要加一个使 j 具有给定值的条件. 于是，一共有四个条件，现在可用§84中那样的方式断定：只有在 $v_1<c_1$，$v_2>c_2$ 的情况下，间断面才是绝对不稳定的，它对应于绝热线上 O' 以下的点. 因此，这一部分曲线不对应于实际上可以实现的任何燃烧方式.

在绝热线 $A'O'$ 段上面，速度 v_1 和 v_2 都是亚声速的，这一段对应于通常的缓慢燃烧. 燃烧传播速率的增大，即 j 的增大，对应于从 A' 点(这里 $j=0$)向 O' 点的移动. 当 j 充分小，即传播速度远小于声速时，对应于 A' 点(这里，$p_1=p_2$)的公式(120.5)是成立的. 点 O' 对应于这种类型的“最快的”燃烧. 我们将讲一讲符合这种极限情况的公式.

与 O 一样，点 O' 是曲线与过点1所引切线的接触点. 所以，只要适当改变符号[参看式(121.9)的脚注]，就可以从关于点 O 的公式 (121.8)—(121.11) 直接得出关于点 O' 的公式. 在关于 v_1 和 v_2 的公式(121.9)和(121.11)中，我们改变第二个根号的符号，于是，关于 v_1-v_2 的表达式(121.12)的符号也要发生变化. 如果 v_1 取它的新值，公式(121.10)的符号则不变. 如果反应热很大($q\gg c_{v_1}T_1$)，所有这些公式都大大简化. 这时得到

$$
\left.\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\gamma_2 p_1 V_1}{\sqrt{2(\gamma_2^2-1)q}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2(\gamma_2-1)q}{\gamma_2+1}}, \\
\frac{p_2}{p_1} &= \frac{1}{\gamma_2+1}, \qquad c_{v_2}T_2 = \frac{2q}{\gamma_2(\gamma_2+1)}.
\end{aligned}\right\} \tag{123.2}
$$

这里，必须作下列说明：我们已经知道，在封闭管内的缓慢燃烧中，在燃烧带的前方一定会形成激波．当燃烧传播速度很大时，这是一个强激波，因此，它对进入燃烧带的气体状态有相当的影响．所以，严格地说，若令未燃气体的状态 p_1，V_1 保持不变，则无从研究燃烧方式随速度增加的变化．为了达到点 O'，必须创造一种不形成激波的燃烧条件．例如，可以在两端开口的管道里实现这种燃烧，这时，在管的后端有燃烧生成物不断排出．排气速率必须使得燃烧带保持静止，这样就不致于形成激波．

当传热效率很高时(例如，辐射传热)，j 值原则上可以超过点 O' 所对应的值．这样形成的燃烧方式必须对应于绝热线 AO 段上的点，因为根据与爆轰相同的理由，对应于点 O 上方的燃烧，一般说来是不会自动产生的．

通常的缓慢燃烧可以自动地变为爆轰．这种转变是由于火焰的加速而产生的，而火焰的加速又引起其前方激波强度的增加，直到激波变得足够强，以致能把通过它的气体点燃．这种火焰自动加速的机理尚不清楚，管壁引起的火焰湍化可能是重要起因 (K. N. 谢尔金)．也可能是由于气体与管壁相摩擦而使火焰阵面弯曲，从而使火焰的定常传播变得不稳定(Я. Б. 泽尔道维奇)．

最后，不妨提请注意：在对应于绝热线上部和下部的燃烧方式之间，除了不等式(123.1)所包含的差别之外，还存在着下述具有普遍性的差别．在 A 点之上，$p_2>p_1$，$V_2<V_1$，$v_2<v_1$．就是说，反应生成物的压力与密度大于原来气体的压力与密度，并且在燃烧阵面之后以速度 v_1-v_2 运动．但是，在点 A 以下的区域内，不等号应反过来：$p_2<p_1$，$V_2>V_1$，$v_2>v_1$，即燃烧生成物不如原气体

稠密.

§ 124. 凝结间断

在爆轰波和所谓**凝结间断**之间，存在着形式上的相似性；凝结间断发生在(例如)含有过饱和水蒸气的气流中. 间断是蒸气在一个非常狭窄的区域内非常迅速地突然凝结的结果，该区域可以看成是分隔原来气体与含有凝结蒸气(雾)的气体的一个间断面(即凝结间断). 应当着重指出的是，凝结间断是一种独特的物理现象，并不是由于气体经过普通激波的压缩而产生的；普通激波的压缩效应不可能导致凝结，因为激波中压力增大对过饱和度的影响小于温度升高的影响. C.З.别连基 (1945) 最先从理论上对凝结间断进行了研究.

与燃烧类似，蒸汽凝结是一种放热过程. 人们以每单位质量气体中蒸汽在凝结时所释放的热量表示反应热 q①. 对于未凝结原始气体的给定状态 p_1，V_1 来说，将 p_2 表示为 V_2 的函数的凝结绝热线，具有与图 119 中所示的燃烧绝热线相同的形状. 对于凝结绝热线上各个不同部分来说，间断面传播速度 v_1, v_2 与声速 c_1，c_2 之间的关系，由不等式(123.1)确定. 但并不是不等式(123.1)所列举的四种情况都有可能实际发生.

首先，产生的问题是，凝结间断对于沿该间断面垂直方向上的小扰动是否稳定. 在这方面，凝结间断的性质与燃烧带的性质完全类似. 我们已经知道(§ 123)，在稳定性方面，燃烧带与普通激波有差别，因为燃烧面上存在一个必须满足的附加条件(通量 j 具有给定的值). 在凝结间断的情况下，也有一个附加条件：间断前

① 严格说来，这反应热 q 并不就是通常所说的凝结潜热，因为在凝结带中所发生的过程不只是蒸气的等温凝结，而且一般还有气体温度的变化. 但是，如果过饱和度不是太小(这一条件通常是得到满足的)，这种差别是无关紧要的.

方气体1的热力学状态必须是蒸汽开始迅速凝结的状态①. 因此，立刻可以断定，点O'以下的整个绝热线，即$v_1<c_1, v_2>c_2$的那一部分，应当予以排除，因为，它不对应于稳定的间断面.

不难看出，满足$v_1>c_1, v_2<c_2$的对应于点O以上部分的间断，实际上也是不可能发生的. 这样的间断面，应当是相对于其前方的气体而以超声速速度运动，因而它的存在不会影响前方气体的状态. 于是，间断一定会在某个由流动条件确定的曲面上形成，也就是说，在这个曲面上应当满足连续流动中快速凝结开始出现所必需具备的条件. 另一方面，在此情况下间断面相对其后方气体的速度应当是亚声速的；而一般说来，亚声速流的方程不存在这样的解：它要求在一个给定的曲面上，所有的量取规定的值②.

因此，只可能有两种类型的凝结间断：(1) 超声速间断(绝热线的AO段)，它有

$$v_1>c_1, v_2>c_2, p_2>p_1, V_2<V_1, \qquad (124.1)$$

凝结时包含着压缩；(2) 亚声速间断(绝热线的$A'O'$段)，它有

$$v_1<c_1, v_2<c_2, p_2<p_1, V_2>V_1, \qquad (124.2)$$

凝结时包含着稀疏.

沿着$A'O'$段，通量值j从A'(这里$j=0$)到O'单调地增加，而沿着AO段，则从A(这里$j=\infty$)到O单调地减少. 在对应于点O与点O'的j值间的范围(对应于速度$v_1=jV_1$具有相应值的某一范围)内是"禁区"，在此范围内，不可能产生凝结间断. 凝结蒸气的总质量和原气体的质量相比，通常是很小的. 所以，我们可以

① 这一条件给出了气体1的压力与温度的关系.

② 类似的推论对合速度v_2($v_2<c_2$垂直于间断面的分量)为超声速的情况也适用.

为避免误解，必须指出，实际上可以由一个具有$v_1>c_1, v_2<c_2$的真正凝结间断，紧接一个产生亚声速流的激波，来模拟具有$v_1>c_1, v_2<c_2$的凝结间断(当蒸气含量和产生流动的表面形状满足一定的条件时).

将气体 1 和气体 2 两者都看成是理想气体；由于同样的理由，两种气体的比热可以假设成相等．这样，点 O 的 v_1 值就由公式(121.9)确定，而点 O' 的 v_1 值可由将第二根式改变符号的同一公式确定．设 $\gamma_1=\gamma_2\equiv\gamma$ 和 $c_1^2=\gamma(\gamma-1)c_vT$，我们求得禁区的 v_1 值为

$$\sqrt{c_1^2+\frac{1}{2}(\gamma^2-1)q}-\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma^2-1)q}<v_1$$

$$<\sqrt{c_1^2+\frac{1}{2}(\gamma^2-1)q}+\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma^2-1)q}. \tag{124.3}$$

问　题

假设 $q/c_1^2\ll 1$，试确定凝结间断中压力比 p_2/p_1 的极限值．

解： 在凝结绝热线的 $A'O'$ 段上(图 119)，比值 p_2/p_1 从 O' 到 A' 单调地增大，取此范围内的值为

$$1-\gamma\sqrt{\frac{2(\gamma-1)q}{(\gamma+1)c_1^2}}\leqslant\frac{p_2}{p_1}\leqslant 1.$$

在 AO 段上，这一比值从 A 向 O 增大，取此范围内的值为

$$1+\frac{\gamma(\gamma-1)q}{c_1^2}\leqslant\frac{p_2}{p_1}\leqslant 1+\gamma\sqrt{\frac{2(\gamma-1)q}{(\gamma+1)c_1^2}}.$$

第十五章　相对论流体动力学

§ 125. 能量-动量张量

相对论流体运动方程的建立具有十分重要的意义．考虑相对论效应之所以必要，不仅是由于流体的宏观运动速度可以很大（与光速相比），而且也是由于流体中粒子的微观运动速度很大，这道理以后会明白．

首先必须确定运动流体能量-动量四维张量 T_{ik} 的形式①．通过物体面元 df 的动量通量就是作用在该面元上的力．因而 $T_{\alpha\beta}df^{\beta}$ 是作用在面元上的力的 α 分量②．我们来考虑流体中某个体元，并采用这样的参考系，即该体元在这个参考系中是静止的（“固有”系）．在这样的参考系中，帕斯卡定律成立：流体的给定部分所承受的压力在各个方向上都大小相同，且垂直于它所作用的面积．因此，我们可写出 $T_{\alpha\beta}df^{\beta}=pdf_{\alpha}$，由此得③ $T_{\alpha\beta}=pg_{\alpha\beta}$.

对于在固有系中的给定体元，表示动量通量密度的分量 $T_{0\alpha}$ 为零．分量 T_{00} 是流体的固有内能密度，本章中用 e 表示．

---

① 本章中的符号与*The Classical Theory of Fields*, Addison-Wesley, Press, Cambridge(Mass.), 1951（中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹著，《场论》，任朗、袁炳南译，人民教育出版社，1969）．第十和十一章中所用的符号相同．拉丁字母附标 $i,k,l\cdots$ 取值 0,1,2,3；$x^{0}=ct$ 为实时坐标．希腊字母附标 $\alpha,\beta,\gamma\cdots$ 取值 1,2,3．度规张量由间隔的表达式 $-ds^{2}=g_{ik}dx^{i}dx^{k}$ 给出，g_{ik} 的伽利略值为 $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$，$g_{00}=-1$.

② 请记住，在伽利略坐标中，$T_{00}=T^{00}=-T^{0}_{0}$ 是能量密度，而 $T^{0}_{\alpha}/c=-T_{0\alpha}/c=T^{0\alpha}/c$ 是动量分量密度；量 $T_{\alpha\beta}=T^{\alpha\beta}=T^{\beta}_{\alpha}$ 组成动量通量密度张量．

③ 我们把所有的表达式都写成协变形式，因为当存在引力场时，即在广义相对论中，我们将用这种形式．

于是在固有系中，给定的那部分流体的能量-动量张量为

$$T_{ik}=\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix}. \tag{125.1}$$

现在不难求得任一参考系中能量-动量张量的表达式. 为此，我们引进流体四维速度 u^i. 在有关的体元的固有系中，四维速度分量为 $u^\alpha=0, u^0=1$. T_{ik} 的表达式为

$$T_{ik}=wu_iu_k+pg_{ik}, \tag{125.2}$$

在上述 u^i 值下，它化为(125.1)式，这里 $w=e+p$ 为每单位体积的焓①. 这就是所要求的能量-动量张量的表达式.

三维形式的分量 T_{ik} 是

$$\left.\begin{aligned} T_{\alpha\beta}&=\frac{wv_\alpha v_\beta}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c}\right)}+p\delta_{\alpha\beta}, \\ T_{\alpha0}&=-\frac{wv_\alpha}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}, \\ T_{00}&=\frac{w}{1-\frac{v^2}{c^2}}-p=\frac{e+p\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{125.3}$$

非相对论的情形，是指流体速度很小($v\ll c$)而且流体粒子的内部(微观)运动速度很小的那种情形. 应记住，在过渡到极限情形时，相对论内能 e 包含着流体粒子的静止能量 nmc^2(m是单个粒子的静止质量) 还应记住，粒子密度 n 是指单位固有体积的量；但在非相对论的表达式中，能量密度是指实验室参考系中单位

① 在本章的所有公式中，各个热力学量，都应理解为各该量在有关的流体元的固有系中的值. 诸如内能、焓和熵等这样的量，都是指单位固有体积的量，并分别用 e, w, σ 表示.

体积的量，有关的流体元在这种参考系中是运动的．所以在极限情况下，应作代换

$$mn\to\rho\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx\rho-\frac{1}{2}\rho v^2c^2,$$

式中，ρ 为通常的非相对论的质量密度．非相对论的能量密度 ρ 和压力，与 ρc^2 相比都是小量．

于是我们得到T_{00} 的极限值为$\rho c^2+\rho\epsilon+\frac{1}{2}\rho v^2$，就是说，它为 ρc^2 加上非相对论的能量密度．张量 $T_{\alpha\beta}$ 所对应的极限形式是 $\rho v_\alpha v_\beta+p\delta_{\alpha\beta}$，即它应与在 §7 中记作 $\Pi_{\alpha\beta}$ 的动量通量密度的普通表达式相同．

相对论的动量通量密度$-\frac{1}{c}T_{\alpha0}$同时又是能量通量密度(除以 c^2)．但在非相对论的极限情形下，这个简单关系不再成立，这是由于非相对论的能量并不包括静止能量．事实上，我们有

$$-\frac{1}{c}T_{\alpha0}\cong\rho v_\alpha+\frac{v_\alpha}{c^2}\left(\rho\epsilon+p+\frac{1}{2}\rho v^2\right).$$

由此可见，动量密度的极限值恰好为 ρv_α，这是理所当然的；关于能量通量密度$-cT_{\alpha0}$，在略去项 ρc^2v_α 后，我们有表达式$\left(\rho\epsilon+p+\frac{1}{2}\rho v^2\right)v_\alpha$，这与 § 6 中所得结果一致．

§ 126. 相对论流体动力学方程

运动方程包含在

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k}=0 \tag{126.1}$$

之中，上式表示张量 T_{ik} 所在物理系统的能量和动量的守恒律．利用 T_{ik} 的表达式(125.2)，可得流体运动方程；但还必须利用不包含在(126.1)之中的粒子数守恒律．

我们来推导表达流体的粒子数守恒的连续方程. 为此，利用粒子通量四维矢量 n^i. 其时间分量是粒子的数密度，而三个空间分量则形成三维粒子通量矢量. 显然，四维矢量 n^i 应与四维速度 u^i 成正比，所以

$$n^i = nu^i, \tag{126.2}$$

这里 n 为标量；由 n 的定义可明显看出，这个标量就是下述这种参考系中粒子的数密度，在该参考系中，所讨论的流体体元是静止的①. 令该通量四维矢量的四维散度为零，即得连续方程②:

$$\frac{\partial(nu^i)}{\partial x^i} = 0. \tag{126.3}$$

现在回到方程(126.1). 对能量-动量张量的表达式(125.2)进行微分，我们得

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = u_i \frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} + wu^k \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0. \tag{126.4}$$

用 u^i 乘这个方程，即把它投影到四维速度的方向上去. 因为 $u_i u^i = -1$，$u_i \frac{\partial u^i}{\partial x^k} = 0$，所以得

$$-\frac{\partial(wu^k)}{\partial x^k} + u^k \frac{\partial p}{\partial x^k} = 0.$$

我们可以把这个方程改写为

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n} nu^k\right) - \frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x^k} nu^k = 0.$$

再利用连续方程(126.3)，便得

---

① 在很高的温度下，物质里面可能会形成新的粒子(例如电子偶)，所以各种粒子的总数要发生变化。在这种情况下，n 必须理解为(例如)所有的电子偶都湮没以后剩下的电子数.

② 请对照电动力学中的连续方程 (*The Classical Theory of Fields*, §4-4)(中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹著，《场论》，任朗、袁炳南译，人民教育出版社，1969，§28).

$$nu^k\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}\right)-\frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x^k}\right]=0.$$

不过，$1/n$ 为物质的分子比容，而 w/n 为物质每个粒子的焓. 所以由热力学恒等式 $d\left(\frac{w}{n}\right)-\frac{dp}{n}=Td\left(\frac{\sigma}{n}\right)$(此式中，$T$ 是温度，而 σ 是每单位固有体积的熵)，有 $nTu^k\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\sigma}{n}\right)=0$，或

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\sigma}{n}\right)=0 \tag{126.5}$$

这里，导数是沿给定流体元的世界线取的.

利用连续方程(126.3)，方程(126.5)也可写成熵通量 σu^i 的四维散度等于零的形式：

$$\frac{\partial(\sigma u^i)}{\partial x^i}=0. \tag{126.6}$$

这两个方程表明流动是绝热的；能量-动量张量(125.2)并未考虑内摩擦和导热过程，就是说，我们考虑的是理想流体.

现在，我们把方程(126.1)投影到垂直于 u^i 的方向上. 矢量 $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k}$ 的这一投影显然等于 $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k}+u_iu^k\frac{\partial T_k^l}{\partial x^l}$；此式与 u^i 的标积等于零. 经简单计算后，可得方程

$$wu^k\frac{\partial u_i}{\partial x^k}=-\frac{\partial p}{\partial x^i}-u_iu^k\frac{\partial p}{\partial x^k}. \tag{126.7}$$

这个方程的三个空间分量是欧拉方程的相对论推广(时间分量是其它三个分量的推论).

作为有意义的应用，我们来研究具有相对论状态方程的物质(即其中压力与包括静止能量的内能密度是可以相比较的)中声音的传播. 声波的流体动力学方程可以线化；从运动方程的最初形式(126.1)出发较为方便，而不从它的等价形式(126.6)、(126.7)出发. 将能量-动量张量分量的表达式(125.3)代入(126.1)，且仅

保留与波幅为同阶小量的项，我们得方程

$$\frac{\partial e'}{\partial t}=-w\nabla\cdot\boldsymbol{v},\quad \frac{w}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\nabla p', \tag{126.8}$$

这里带一撇的表示该量的可变部分. 消去 $\boldsymbol{v}$，即得$\frac{\partial^2 e'}{\partial t^2}=c^2\Delta p'$，最后，令 $e'=\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_{绝热}p'$，可得 p'的波动方程，式中声速为

$$u=c\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_{绝热}}; \tag{126.9}$$

这里下标“绝热”是指在绝热过程，即指在σ/n不变的过程中取导数. 这个公式与相应的非相对论表达式的区别，在于这里用e/c^2代替了质量密度.

在超相对论情况下，任何物质的状态方程均为$p=\frac{1}{3}e$. 因而声速为$u=c/\sqrt{3}$，其大小为光速的$\sqrt{3}$分之一.

最后，我们简要地讨论有引力场情况下的流体动力学方程. 只要将方程(126.6)和(126.7)中的普通导数换成协变导数，即得这些方程：

$$wu^k u_{i;k}=-\frac{\partial p}{\partial x^i}-u_i u^k\frac{\partial p}{\partial x^k},\quad (\sigma u^i)_{;i}=0. \tag{126.10}$$

由这些方程可以导出引力场中的力学平衡条件. 在平衡情况下，引力场是静止场；我们取一个参考系，使物质在其中是静止的$\left(u^\alpha=0,\ u^0=\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\right)$，所有的量均与时间无关，而度规张量的混合分量为零($g_{0\alpha}=0$). 因而方程(126.10)的空间分量给出

$$-w\Gamma^0_{\alpha 0}u^0u_0=\frac{1}{2}\frac{w}{g_{00}}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}=-\frac{\partial p}{\partial x^\alpha},$$

或

$$\frac{1}{w}\frac{\partial p}{\partial x^\alpha}=-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln\sqrt{-g_{00}}. \tag{126.11}$$

这就是所要求的平衡方程. 在非相对论的极限情况下，$w \cong \rho c^2$，$-g_{00}=1+2\phi/c^2$(ϕ 为牛顿引力势)，因而方程(126.11)变为 $\nabla p= -\rho\nabla\phi$，即普通的流体静力学方程.

问　　题

问题 1. 试求描述一维非定常简单波的相对论流体动力学方程的解.

解: 在简单波中，所有的量都可表示成这些量中其它任一个量的函数(参看§94). 把运动方程写成下列形式:

$$\frac{\partial T_{00}}{c\partial t}+\frac{\partial T_{01}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial T_{01}}{c\partial t}+\frac{\partial T_{11}}{\partial x}=0, \tag{1}$$

并考虑到 T_{00}, T_{01}, T_{11} 互为函数，我们得

$$dT_{00}dT_{11}=(dT_{01})^2.$$

这里，应把 $T_{00}=eu_0^2+pu_1^2, T_{01}=wu_0u_1, T_{11}=eu_1^2+pu_0^2$ 代入上式，并利用 $u_1^2-u_0^2=-1$；为方便起见，引进足以使 $u_0=\cosh\eta$ 和 $u_1=\sinh\eta$ 成立的参数 η，得

$$\operatorname{arctgh}\frac{v}{c}=\pm\frac{1}{c}\int\frac{u}{w}de, \tag{2}$$

式中，u 是声速. 其次，由(1)得

$$\frac{\partial x}{\partial t}=c\frac{dT_{01}}{dT_{00}},$$

计算这个导数，最后得出

$$x=\frac{t(v\pm u)}{1\pm\frac{uv}{c^2}}+f(v). \tag{3}$$

公式(2)和(3)就是所要求的解.

问题 2. 试求伯努利方程的相对论推广.

解: 在定常流动中，所有的量均与时间无关. 方程(126.7)的空间分量为

$$\frac{w}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-c^2\nabla p-\frac{\boldsymbol{v}}{1-\frac{v^2}{c^2}}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla p).$$

用 $\boldsymbol{v}/n$ 乘这些方程求标积，并利用在等熵 σ/n 情况下的关系式 $d(e/n)=-pd(1/n)$，最后得

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left(\frac{\dfrac{w}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)=0.$$

由此可知，沿任一流线，量

$$\frac{w}{n}\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

保持为常数. 当 $v\ll c$ 时，这就变成普通的伯努利方程：

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2=\text{常数}.$$

问题 3. 试求势流的相对论推广(И. М. 哈拉特尼可夫，1954).

解： 等熵流动时，$\sigma/n=$常数，因而

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\sigma}{n}\right)=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}\right)-\frac{1}{n}\frac{\partial p}{\partial x^k}=0.$$

于是运动方程(126.7)变为

$$\frac{w}{n}u^k\frac{\partial u_i}{\partial x^k}+u_iu^k\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}\right)$$
$$\equiv u^k\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}u_i\right)=-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{w}{n}\right),$$

或 $u^k\omega_{ik}=0$，这里，

$$\omega_{ik}=\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{w}{n}u_i\right)-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{w}{n}u_k\right).$$

这个方程对应于势流的解就是那些满足 $\omega_{ik}=0$ 的解，即

$$\frac{w}{n}u_i=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}. \tag{1}$$

在非相对论的极限情况下，此式给出普通的势流条件：$v_i=\partial\phi/\partial x^i$.

若是定常流动，由(1)得伯努利方程：在整个流场中 $wu_0/n=$常数.

问题 4. 试求相对论流体动力学中的激波绝热方程和激波前后气体速度的公式(A. H. 陶伯，1948).

解： 我们采用这样一种参考系来研究间断面：令间断面在该参考系中是静止的. 并取 x' 轴(x 轴)垂直于间断平面，即沿气体速度的方向. 能量和动量通量密度的连续条件为

$$-[cT_{0x}]=-c[wu_0u_x]=\left[\frac{wv}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\right]=0, \tag{1}$$

$$[T_{xx}]=[wu_x^2+p]=\left[\frac{wv^2}{c^2-v^2}+p\right]=0. \tag{2}$$

由这些条件不难求得激波两侧气体速度的表达式如下$\left(令\frac{v}{c}=\mathrm{tgh}\,\phi,\quad u_x=\right.$ $\left.\sinh\phi, u_0=-\cosh\phi\right)$:

$$\frac{v_1}{c}=\sqrt{\frac{(p_2-p_1)(e_2+p_1)}{(e_2-e_1)(e_1+p_2)}},\quad \frac{v_2}{c}=\sqrt{\frac{(p_2-p_1)(e_1+p_2)}{(e_2-e_1)(e_2+p_1)}}, \tag{3}$$

这里下标 1 和 2 表示对应于间断面两侧的量. 两侧气体的相对速度由相对论的速度加法律给出:

$$v_{12}=\frac{v_1-v_2}{1-\frac{v_1v_2}{c^2}}=c\sqrt{\frac{(p_2-p_1(e_2-e_1)}{(e_1+p_2)(e_2+p_1)}}. \tag{4}$$

在非相对论的极限情况下, 令 $e\cong mc^2n=c^2/V$(V 是比容), p 与 e 比较可略去. 于是,公式(3)和(4)变成(82.6)和(82.7). 在超相对论情况下,$p=e/3$, 由式(3)得

$$\frac{v_1}{c}=\sqrt{\frac{3e_2+e_1}{3(3e_1+e_2)}},\quad \frac{v_2}{c}=\sqrt{\frac{3e_1+e_2}{3(3e_2+e_1)}}.$$

随着激波强度之增加($e_2\to\infty$),v_1 趋于光速 c,而 v_2 趋于 $c/3$.

为了求得激波绝热方程,除(1),(2)外,还要补充以粒子通量密度的连续条件:

$$[nu_x]=\left[\frac{nv}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]=0. \tag{5}$$

从(1),(2)和(5)中消去各个速度,即得所要求的方程:

$$\frac{w_1^2}{n_1^2}-\frac{w_2^2}{n_2^2}+(p_2-p_1)\left(\frac{w_1}{n_1^2}+\frac{w_2}{n_2^2}\right)=0. \tag{6}$$

在非相对论的极限情况下,这个公式变成(82.9).

§ 127. 耗散过程的相对论方程

有耗散过程(粘性和导热)的相对论流体动力学方程的建立,可归结为能量-动量张量和粒子通量密度矢量中那些附加项的形式的确定. 兹分别用 τ_{ik} 和 ν_i 来表示这些项,可写出

$$T_{ik}=pg_{ik}+wu_iu_k+\tau_{ik}, \tag{127.1}$$

$$n_i = nu_i + \nu_i. \tag{127.2}$$

运动方程仍然包含在下式之中：

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \qquad \frac{\partial n^i}{\partial x^i} = 0.$$

但首先必须更仔细讨论速度 u^i 本身的概念．在相对论力学中，能量通量必定与质量通量有联系．因而，当有（例如）热通量时，用质量通量密度定义的速度（像在非相对论流体动力学中那样）就没有直接的意义．现在，我们按以下条件来定义速度：在任一给定流体元的固有系中，这个流体元的动量为零，而它的能量可通过其它热力学量表示，所用的公式，与没有耗散过程的情形用的相同．这就是说，在固有系中，张量 τ_{ik} 的分量 τ_{00} 和 $\tau_{0\alpha}$ 为零；因为在这种参考系中还有 $u^\alpha=0$，于是，我们得到（在任何参考系中）的张量方程为

$$\tau_{ik}u^k = 0. \tag{127.3}$$

对于矢量 ν_i，类似的关系

$$\nu_i u^i = 0 \tag{127.4}$$

必定成立，因为按定义，在固有系中粒子通量四维矢量 n^i 的分量 n^0 必须等于粒子数密度 n.

根据熵增定律的要求，可以确立所要求的张量 τ_{ik} 和矢量 ν_i 的形式．这个定律应包含在运动方程之中（其方法，与§2中根据这些方程求理想流体的等熵条件时所用方法一样）．通过简单的变换，利用连续方程，容易求得方程

$$u^i\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = -T\frac{\partial}{\partial x^i}(\sigma u^i) + \mu\frac{\partial \nu^i}{\partial x^i} + u^i\frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k},$$

式中，$\mu=(w-T\sigma)/n$ 是相对论的化学势．最后，利用关系式(127.3)，可将这个方程改写为

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i\right) = -\nu^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mu}{T}\right) - \frac{\tau_i^k}{T}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}. \tag{127.5}$$

左边的表达式应是熵通量的四维散度，而右边的表达式应是由耗散过程引起的熵的增加. 于是，熵通量密度四维矢量为

$$\sigma^i = \sigma u^i - \frac{\mu}{T}\nu^i, \tag{127.6}$$

而 τ_{ik} 和 ν^i 应是速度梯度和热力学量的线性函数，这样，使得方程(127.5)的右边一定是正的. 这个条件，连同方程(127.3)和(127.4)，就唯一确定了四维张量 τ_{ik} 和四维矢量 ν_i 的形式:

$$\tau_{ik} = -\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} + u_k u^l \frac{\partial u_i}{\partial x^l} + u_i u^l \frac{\partial u_k}{\partial x^l}\right) - \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial u_l}{\partial x^l}(g_{ik} + u_i u_k), \tag{127.7}$$

$$\nu_i = -\frac{\kappa}{c}\left(\frac{nT}{w}\right)^2\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mu}{T}\right) + u_i u^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right]. \tag{127.8}$$

这里，η 和 ζ 是两个粘性系数，κ 是热导率，其定义与非相对论中的定义相符.

特别是，纯导热对应于没有粒子通量时的能量通量. 没有粒子通量的条件是 $nu^\alpha + \nu^\alpha = 0$; 因而，在保留梯度一阶项的范围内，能量通量密度为

$$cT^0_\alpha = cwu^0 u_\alpha = -\frac{cw}{n}\nu_\alpha = \frac{\kappa n T^2}{w}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\mu}{T}\right).$$

利用热力学恒等式

$$d\left(\frac{\mu}{T}\right) = -\frac{w}{nT^2}dT + \frac{1}{nT}dp,$$

我们求得能量通量为

$$-\kappa\left[\nabla T - \frac{T}{w}\nabla p\right].$$

可以看出，在相对论导热的情况下，热通量不是简单地与温度梯度成正比，而是与温度梯度和压力梯度的某个组合成正比.

第十六章　超流体动力学

§128. 超流体的基本性质

当温度接近于绝对温度时，在流体的性质中，量子效应开始显得重要了。在自然界中，只有一种物质在绝对零度时仍旧是流体，那就是氦；所有的其余流体，远在量子效应变得显著之前就凝固了。在温度为 2.19K 时，液态氦有一个 λ 点(第二类相变)；在温度低于该点温度时，液态氦(氦 II)有许多异常的性质，其中最重要的性质是 1938 年由 П. Л. 卡皮查发现的**超流动性**. 这是这样一种性质，即流体在狭窄的毛细管或缝隙中流动时，并不呈现粘性①.

Л. Д. 朗道(1941)建立了超流体的理论. 本章将要讨论的，只是宏观描述超流体动力学性质的那部分理论.

氦 II 的动力学基础是下述微观理论的基本结果②. 当温度不等于零时，氦 II 宛如两种不同液体的混合物. 其中一种是超流体，在沿固壁运动时不呈现出任何粘性. 另一种则是正常的粘性流体. 非常重要的是：在这两部分流体的相对运动中，它们之间不出现摩擦力，即动量没有从一种流体转移给另一种流体.

但是，应该很明确地指出，之所以把液体当作正常部分和超流体部分混合物来考虑，不过是为了对那量子效应显得较为重要的

① 只有一种氦的同位素 He^4 是超流体. 液态同位素 He^3 不能成为超流体.

② 参看 *Statistical Physics*, Pergamon Press, London, 1958, §66, §67(中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹著，《统计物理学》，杨训恺译，人民教育出版社，1979，§66，§67).

流体所产生的现象能有一种方便的描述. 有如以经典术语对量子现象所作的描述一样，这种描述并非完全适用的. 实际上应该说，像氦 II 这样的量子流体，能够同时进行两种运动，每一种运动都有它自己的"有效质量"(两种有效质量之和等于流体的总质量). 这两种运动之一是正常的流动，即具有像普通粘性流体运动一样的性质，而另一种则是超流体的运动. 两种运动之间，不发生任何动量转移. 在一定的意义上，可以说成流体的超流体部分和正常部分，但是，这决不意味着流体在实际上可以分成这样两个部分.

关于氦 II 中现象的真实性质，只要小心地注意到上述约定，我们就可以采用流体的**超流体部分**和**正常部分**这样的术语，以便对这些现象作一个方便简明的描述. 但是，我们宁愿采用更为确切的术语：**超流体流动**和**正常流动**，而不把这些术语与流体"两部分混合物"的成分联系起来.

有了上述两种流动的概念，我们就能够对所观察到的氦 II 的主要动力学性质作出一个简单的解释. 当氦 II 沿狭窄的通道流动时，不呈现出粘性是无摩擦超流体沿通道流动的结果；可以说，那部分正常流体停留在容器中，它以缓慢得多的速度流过通道，其速度决定于它的粘性和通道的宽度. 另一方面，根据浸没在氦 II 中圆盘扭转振动的阻尼来测量氦 II 的粘性系数，则得出非零的值；圆盘的转动引起它附近的氦 II 的正常流动，这种流动由于其所具有的粘性而使圆盘停止下来. 因此，在通过毛细管流动的实验中，可以观测到超流体流动. 而在氦 II 中的圆盘转动的实验中，则观测到正常流动. 当充满氦 II 的圆筒容器绕自身轴线转动时，可以特别清楚地看到这两种流动的存在. 转动的圆筒壁面引起正常流动，同时只带动一部分流体一起运动，而超流体部分仍旧处于静止状态. 所以，转动容器的总转动惯量 I 小于假设全部流体随容器一起转动所计算出来的转动惯量 I_0，只要测量比值 I/I_0，

就可马上求出正常流体和超流体各占多少.

除了不呈现粘性外,超流体流动还有另外两个重要的性质,即超流体不传热，并且总是势流. 这两个性质也可以从微观理论得出,根据微观理论，正常流动实际上是一种“激发气体”的流动(我们可以回顾一下：量子流体中原子的集合热运动可以看成是一个激发系统，这个系统表现得像在流体所占有的体积内运动的准粒子,并且具有确定的动量和能量).

氦 II 的熵由基本激发态的统计分布确定. 因此,在任何一种激发气体处于静止状态的流动中，不存在宏观的熵传输. 这意味着超流体流动不包含熵的传输，所以也不传热. 由此得知，氦 II 的超流体流动在热力学上是可逆的，这是一个从实验中得出的结果.

由正常流动实现传热是氦 II 中传热的唯一机制. 所以,它具有对流的性质,根本不同于普通的导热. 氦 II 中的任何温度差都会引起正常的和超流体的两种内流；这两种流动可以使传质相互抵消,所以流体中不产生宏观的传质.

下面,将分别用 $\boldsymbol{v}_s$ 和 $\boldsymbol{v}_n$ 表示超流体流动和正常流动的速度. 上面所描述的传热机制,意味着熵通量密度是速度 $\boldsymbol{v}_n$ 和每单位体积内熵的乘积 $\boldsymbol{v}_n\rho s$(s 是每单位质量的熵). 热通量密度等于熵通量密度乘以 T,即

$$\boldsymbol{q}=\rho T s \boldsymbol{v}_n. \tag{128.1}$$

超流体部分的势流对应于方程

$$\nabla\times\boldsymbol{v}_s=0, \tag{128.2}$$

在任何时刻，此方程在流体所占有的整个体积内必须成立. 这个性质是氦 II 能谱特性的宏观表述,该能谱特性构成超流动性微观理论的基础. 长波长(即小动量和小能量)的基本激发是声量子,即声子. 因此,宏观的超流体动力学只能包含声振动,这是从条件

(128.2)推出的结论.

因为超流体流动是势流，所以固体在定常超流体绕流中不受阻力的作用(达朗伯佯谬；参看 §11). 与此相反，正常的流动有阻力作用在固体上. 如果流动中超流体流动传质和正常流动的传质相平衡，则得到一种非常奇异的流动：即浸没在氦 II 中的物体受到力的作用，但是没有净传质.

§129. 热-机械效应

氦 II 中**热-机械效应**如下：当氦通过狭窄的毛细管从容器中流出时，容器中会出现温升现象，而在氦从毛细管流入另一个容器时，则在另一个容器中出现冷却现象①. 这种现象有一个很自然的解释，即流入毛细管的主要是超流体，所以没有热传输，因此剩在容器中的热分散给数量减少了的氦 II 了. 而在从毛细管流入的容器中，则看到相反的情形.

不难求出单位质量的氦通过毛细管进入容器时所吸收的热量 Q. 流入的流体没有熵传输. 所以，结果容器中的氦保持在其初始温度上，则一定需要热量 Ts 来补偿每单位质量内熵的减少，这一减少是由于加入了熵为零的单位质量的氦所引起的. 这意味着：当单位质量的氦进入装有温度为 T 的氦的容器时，要吸收热量

$$Q = Ts. \tag{129.1}$$

反之，当单位质量的氦离开装有温度为 T 的氦的容器时，则放出热量 Ts.

---

① 严格说来，对于任何流体都会出现很微弱的热-机械效应；在氦 II 中的反常现象只是这种效应的突出反映. 普通流体中的这种效应，是一种类似于珀耳帖热电效应的不可逆现象(并已在稀薄气体中被实际观测到). 这样一种效应也出现在氦 II 中，但是被后面要讲到的另一种更大得多的效应掩盖了，后者只出现在氦 II 中，并且不像珀耳帖效应那样是不可逆现象.

现在来研究两个装满氦 II 的容器，其中的温度分别为 T_1 和 T_2，并由一狭窄的毛细管所连通. 因为超流体可以自由地沿毛细管流动，所以很快就建立起力学平衡. 但是，由于超流体并不传热，所以建立热平衡(即两个容器中氦的温度相同)要缓慢得多.

力学平衡是在两个容器中氦的熵 s_1，s_2 不变的情况下建立起来的，利用这个事实，很容易写出力学平衡的条件. 如果 ϵ_1，ϵ_2 是每单位质量的氦在温度 T_1、T_2 时的内能，则由超流体流动所达到的力学平衡条件(即最小的能量条件)为 $(\partial\epsilon_1/\partial N)_{s_1}=(\partial\epsilon_2/\partial N)_{s_2}$，式中 N 为单位质量的氦的原子数. 导数 $(\partial\epsilon/\partial N)_s$ 为化学势 μ. 因此得到平衡条件为

$$\mu(p_1,T_1)=\mu(p_2,T_2), \tag{129.2}$$

式中，p_1 和 p_2 分别是两个容器中的压力.

以后，我们将不把化学势 μ 理解为通常的每个粒子(原子)的热力学势，而理解为每单位质量的氦的热力学势. 其间只差一个常数因子，即氦原子的质量.

如果压力 p_1 和 p_2 很小，于是将化学势 μ 按压力的幂展开，并且注意到 $(\partial\mu/\partial p)_T$ 就是比容(它几乎与温度无关)，则得

$$\frac{\Delta p}{\rho}=\mu(0,T_1)-\mu(0,T_2)=\int_{T_1}^{T_2} s\,dT,$$

式中，$\Delta p=p_2-p_1$. 如果温度差 $\Delta T=T_2-T_1$ 也很小，然后再按 ΔT 的幂展开，同时注意到 $(\partial\mu/\partial T)_p=-s$，则得

$$\frac{\Delta p}{\Delta T}=\rho s. \tag{129.3}$$

因为 $s>0$，所以 $\Delta p/\Delta T>0$. 关系式 (129.3) 是由 H. 伦敦最先(1939)导出的.

§130. 超流体的动力学方程组

现在来导出描写氦 II 宏观(唯象上的)流动的完整方程组. 根

据前面的讨论，应该把运动方程组看成在每一个点上包含有两个速度 $\boldsymbol{v}_s$ 和 $\boldsymbol{v}_n$，而不像普通流体力学中那样只是一个速度. 我们发现，只需简单地从伽利略相对性原理以及必要的守恒律所要求的条件出发（还利用由方程(128.1)和(128.2) 所表述的运动的性质），就可以唯一地确定所需的运动方程组.

应该记住，当速度很高时，氦 II 实际上不再是超流体了. 我们不准备讨论这种**临界速度**现象的性质，而仅仅指出：临界速度的存在意味着只有当速度 v_s 和 v_n 不太大时，氦 II 的超流体动力学方程组才有物理意义. 尽管如此，我们首先还是不对速度 $\boldsymbol{v}_s$ 和 $\boldsymbol{v}_n$ 作任何假定来导出这些方程组，因为，如果略去了速度的高次幂项，就不可能从守恒律如实地导出这些方程组. 导出后再将所得到的方程组过渡到有物理意义的小速度的情形.

用 $\boldsymbol{j}$ 表示质量的通量密度；这个量也是单位体积的动量（参看§49的脚注）. 兹写出

$$\boldsymbol{j}=\rho_s\boldsymbol{v}_s+\rho_n\boldsymbol{v}_n \tag{130.1}$$

作为超流体流动和正常流动的通量之和. 其系数 ρ_s 和 ρ_n 可以称为超流体的密度和正常流体的密度，两者之和是氦 II 的实际密度 ρ:

$$\rho=\rho_s+\rho_n. \tag{130.2}$$

当然，量 ρ_s和 ρ_n 都是温度的函数；在绝对零度时，ρ_n 趋于零，这时氦 II 完全变成超流体①，而在 λ 点，则 ρ_s 趋于零，这时液体完全变为正常流体. 还应注意，一般说来，ρ_n 和 ρ_s 还依赖于速度本身②；只有在小速度时，这种依赖关系才可以略去不计，而把 ρ_n，ρ_s 看成只是温度（和压力）的函数.

---

① 如果氦 II 中含有杂质（同位素 He^3），那么，即使在 0K 时，ρ_n 也不为零.

② 更确切地说，只依赖于速度差 $\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s$，因为，如果流体以速度 $\boldsymbol{v}_s=\boldsymbol{v}_n$ 作整体运动，当然不会影响它的热力学性质.

密度 ρ 和质量通量密度 $\boldsymbol{j}$ 必须满足连续方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0, \tag{130.3}$$

此式表述质量守恒定律. 从动量守恒定律得出方程

$$\frac{\partial j_i}{\partial t}+\frac{\partial\Pi_{ik}}{\partial x_k}=0, \tag{130.4}$$

式中 Π_{ik} 是动量通量密度张量.

目前，我们不讨论耗散过程，因而流动是可逆的，同时流体中的熵也是守恒的. 因为熵通量为 $\rho s\boldsymbol{v}_n$，所以，可把熵守恒定律写成

$$\frac{\partial\rho s}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho s\boldsymbol{v}_n)=0. \tag{130.5}$$

有了方程(130.3)—(130.5)，必须再补充一个方程，用以确定速度 $\boldsymbol{v}_s$ 的时间导数. 这是一个在任何时间内都为势流的方程；这意味着 $\boldsymbol{v}_s$ 的导数必须是某个标量函数的梯度. 可以将这个方程写为

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}v_s^2+\mu\right)=0, \tag{130.6}$$

式中 μ 为某个标量函数.

当然，只有在得到至今尚未确定的 Π_{ik} 和 μ 的函数值以后，方程(130.4)和(130.6)才有意义. 为此，必须利用能量守恒定律以及基于伽利略相对性原理的论据. 方程(130.3)—(130.6)必然隐含着能量守恒定律，表示能量守恒定律的方程形式为

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla.\boldsymbol{Q}=0, \tag{130.7}$$

其中，E 为单位体积流体的能量，$\boldsymbol{Q}$ 为能量通量密度。凭伽利略相对性原理，能够确定所有的量作为一个速度($\boldsymbol{v}_s$)以及两种同时发生的运动所给定的相对速度 $\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s$ 的函数.

我们采用两个坐标系，一个是原有的坐标系 K，另一个是使超流体流动中某个流体元速度为零的坐标系 K_0. 坐标系 K_0 相对于坐标系 K 运动，其速度等于超流体在原有坐标系中的速度. 在坐

标系K中，所有量的值与它们在坐标系 K_0 中的值(K_0 中的值用下标 0 表示)，由下述力学变换公式互相联系①:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}_s+\boldsymbol{j}_0,\\
&E=\frac{1}{2}\rho v_s^2+\boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{v}_s+E_0,\\
&\boldsymbol{Q}=\left(\frac{1}{2}\rho v_s^2+\boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{v}_s+E_0\right)\boldsymbol{v}_s+\frac{1}{2}v_s^2\boldsymbol{j}_0+\Pi_0\cdot\boldsymbol{v}_s+\boldsymbol{Q}_0,\\
&\Pi_{ik}=\rho v_{si}v_{sk}+v_{si}j_{0k}+v_{sk}j_{0i}+\Pi_{0ik}.
\end{aligned}\right\}\tag{130.8}$$

其中，$\Pi_0\cdot\boldsymbol{v}_s$ 表示分量为 $\Pi_{0ik}v_{sk}$的矢量.

在坐标系 K_0 中，所讨论的流体元只有一种运动，即以速度 $\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s$ 作正常流动. 因此，量 $\boldsymbol{j}_0$，E_0，$\boldsymbol{Q}_0$ 和 Π_{0ik} 只能依赖于速度差 $\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s$ 而不能分别依赖于速度 $\boldsymbol{v}_n$ 和$\boldsymbol{v}_s$，特别是，矢量 $\boldsymbol{j}_0$ 和$\boldsymbol{Q}_0$ 必然平行于矢量$\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s$(质量通量密度 $\boldsymbol{j}_0$就是 $\rho_n(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)$). 于是，公式(130.8) 在 $\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s$ 给定时可确定出各量对 $\boldsymbol{v}_s$ 的依赖关系.

能量 E_0是 ρ, s 和单位体积动量 $\boldsymbol{j}_0$的函数，E_0满足热力学恒等式

$$dE_0=\mu d\rho+Td(\rho s)+(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)\cdot d\boldsymbol{j}_0,\tag{130.9}$$

式中，μ 为单位质量流体的(热力学的)化学势. 前两项相当于等容 (现在的情形下是单位体积) 下静止流体的通常的热力学恒等式，而最后一项则表明: 能量对动量的导数就是速度.

---

① 这些公式是伽利略相对性原理的直接结果，所以，对于任何特定的坐标系均成立. 例如，通过研究普通流体，就可以导出这些方程. 普通流体动力学中的动量通量密度张量为 $\Pi_{ik}=\rho v_i v_k+p\delta_{ik}$.

坐标系K中的流体速度 $\boldsymbol{v}$ 与坐标系 K_0 中的流体速度 $\boldsymbol{v}_0$ 之间的关系为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{u}$，其中，$\boldsymbol{u}$ 是两个坐标系的相对速度. 以此代入 Π_{ik}，则得

$$\Pi_{ik}=p\delta_{ik}+\rho v_{0i}v_{0k}+\rho v_{0i}u_k+\rho u_i v_{0k}+\rho u_i u_k.$$

令
$$\Pi_{0ik}=p\sigma_{ik}+\rho v_{0i}v_{0k} \text{ 和 } \boldsymbol{j}_0=\rho\boldsymbol{v}_0,$$

就得到方程(130.8)中[illegible]张量 Π_{ik} 的变换公式. 用类似方法，可得到其余的公式.

这里不再作进一步的计算，计算是相当繁琐的，我们只讲其概况．把式(130.8)中的E和$\boldsymbol{Q}$，代入能量守恒方程(130.7)中，同时利用恒等式(130.9)，可计算出导数$\partial E_0/\partial t$．然后用方程(130.3)—(130.6)来消去全部对时间的导数($\dot{\rho}, \dot{\boldsymbol{v}}_s$等)；于是能量守恒方程必定是恒等式．如果考虑到方程(130.6)中的通量$\boldsymbol{Q}_0$，Π_{0ik}和标量μ只能依赖于热力学变量和速度$\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s$，而不依赖于它们的梯度(因为已略去了耗散过程)，我们就会发现：只有当上述各量以唯一确定的方式加以规定时，才能获得这个恒等式．

我们还发现：标量函数μ就是化学势(根据这个理由，我们用同一字母表示)，于是能量通量密度和动量通量密度张量的最后表达式为

$$\boldsymbol{Q}=\left(\mu+\frac{1}{2}v_s^2\right)\boldsymbol{j}+T\rho s\boldsymbol{v}_n+\rho_n\boldsymbol{v}_n[\boldsymbol{v}_n\cdot(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)], \quad (130.10)$$

$$\Pi_{ik}=\rho_n v_{ni}v_{nk}+\rho_s v_{si}v_{sk}+p\delta_{ik}, \quad (130.11)$$

其中

$$p=-E_0+T\rho s+\mu\rho+\rho_n(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)^2. \quad (130.12)$$

Π_{ik}的表达式是普通流体动力学中公式$\Pi_{ik}=\rho v_i v_k+p\delta_{ik}$的自然推广．所以，公式(130.12)所定义的量$p$，自然也可以当作流体的压力①．

方程(130.3)—(130.6)连同由式(130.10)和(130.11)所定义的$\boldsymbol{j}$和Π_{ik}，组成了所求的超流体动力学的完整方程组②．这个

---

① 通常的热力学把压力定义为作用在相对于静止介质的单位面积上的平均力，然而在普通的流体力学中，因为总可以取一个坐标系使得所讨论的流体元处于静止，所以，关于压力的定义不致引起混淆(忽略耗散过程)．但是在超流体动力学中，通过合适地选取坐标系，只能在两个同时发生的运动中消去一个，所以通常的压力定义就不能采用了．

在完全静止的流体中，定义(130.12)当然和普通的定义相同，因为在这种情形下，根据化学势的定义，有$\mu\rho+T\rho s-E_0=p$．

② 方程组也可以建立成一种普遍形式，以适用于任何浓度的氦Ⅱ和其他物质(实际上是同位素He^3)的混合物．这种方程组已由И.M.哈拉特尼科夫(И.M. Халатников)得出(ЖЗТФ, **23**, 169, 1952)．

方程组是很复杂的，主要的原因在于：出现在方程中的量 ρ_s, ρ_n, μ 等都是速度的函数（更确切地说，是速度差 $\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s$ 的函数）。原则上，这些函数的形式只能由微观理论确定.

但是，在物理上感兴趣的小速度的情形下①，这些方程将大为简化. 在这种情形下，正如已经指出的那样，首先可以忽略 ρ_n 和 ρ_s 对速度的依赖关系；这样，通量 $\boldsymbol{j}$ 的表达式(130.1)在实际上给出了 $\boldsymbol{j}$ 对 $\boldsymbol{v}_s$ 和 $\boldsymbol{v}_n$ 幂级数展开式中的首项. 出现在方程中的其余热力学量也应按速度的幂级数展开.

取压力和温度作为独立的热力学变量. 于是，化学势的热力学恒等式为

$$d\mu=-sdT+\frac{1}{\rho}dp-\frac{\rho_n}{\rho}(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)\cdot d(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s);$$

通过微分表达式(130.12)，并利用恒等式(130.9)，可以得到上述方程. 由此可见，μ 对速度差的幂级数展开式的头两项为

$$\mu(p,T,\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)\approx\mu(p,T)-\frac{1}{2}\frac{\rho_n}{\rho}(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)^2, \quad (130.13)$$

上式右边包含静止流体的普通化学势 $\mu(p,T)$ 和密度 $\rho(p,T)$. 对温度和压力求导，可求得相应的熵和密度的展开式：

$$s(p,T,\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)\approx s(p,T)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right), \quad (130.14)$$

$$\rho(p,T,\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)\approx\rho(p_1T)+\frac{1}{2}\rho^2(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)^2\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p_n}{\rho}\right). \quad (130.15)$$

将这些表达式代入动力学方程组，则方程组有效到速度的二阶项.

现在简要地讨论一下超流体动力学方程组中耗散项的问题. 这些项的形式，只受熵增定律和动力系数对称性原理所要求的条件的限制. 由 И. M. 哈拉特尼科夫所作的详细分析表明：总共有五个独立的耗散系数（而不是像普通流体那样只有三个系数 η, ξ, κ）.

① 也就是说，当速度与第二声（参看§131）的传播速度之比是一个小量时.

当然，其中一个是由正常流动所引起的第一粘性系数 η，它完全类似于普通流体的粘性系数．动量通量张量 Π_{ik} 以及另一个量 $\frac{1}{2}v_s^2+\mu$（其梯度出现在方程(130.6)中）还包含正比于 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_n$ 和 $\nabla\cdot[\rho_s(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)]$ 的项；在四个比例系数中，根据动力系数的对称性，其中两个相等，所以有三个"第二粘性系数" ξ_1，ξ_2，ξ_3．最后，熵方程(130.5)的右边包含有形式为 $\frac{1}{T}\nabla\cdot(\kappa\nabla T)$ 的项以及速度梯度的二次项，前者具有在形式上类似于普通流体导热系数的系数 κ，后者是由传热中粘性效应引起的（参看方程(49.5)）．

超流体动力学方程组的边界条件如下：首先，在任何静止的固体表面上，质量通量 $\boldsymbol{j}$ 的垂直分量必须为零．为了确定 $\boldsymbol{v}_n$ 的条件，应该记住，正常流动实际上是一种热激发气体的流动．在沿固体表面的流动中，激发量子与表面相互作用，在宏观上必须把它描写成正常流体对固体表面的"附着"作用，就像在普通粘性流体中一样．换句话说，速度 $\boldsymbol{v}_n$ 在固体表面上的切向分量必须为零．

因为固体表面可以吸收和发射激发量子，即相当于流体和固体表面之间的传热，所以，$\boldsymbol{v}_n$ 与固体表面垂直的分量不必为零．边界条件只要求垂直于固体表面的热通量是连续的．温度本身在边界上有间断，其间断值正比于热通量 $\Delta T=Kq$，式中的比例系数 K 同时依赖于流体和固体表面的性质．这种间断的产生，是由氦II中传热的独特性质引起的．固体与流体之间对传热的整个阻抗，都集中在邻接于固体表面的流体中，因为流体中热的对流传播几乎不遇到阻抗．所以，引起传热的全部温度降都发生在固体表面本身．

这些边界条件中，有个有趣的性质，即固体表面与运动流体之间的热交换会产生作用在固体表面上的切向力．如果 x 轴垂直于固体表面，而 y 轴与固体表面相切，则每单位面积上的切向力等

于动量通量张量的分量 Π_{xy}. 因为在固体表面上必须有

$$j_x=\rho_n v_{nx}+\rho_s v_{sx}=0,$$

所以求得这个力的非零表达式为

$$\Pi_{xy}=\rho_s v_{sx}v_{sy}+\rho_n v_{nx}v_{ny}=\rho_n v_{nx}(v_{ny}-v_{sy}).$$

还可以用热通量 $\boldsymbol{q}=\rho sT\boldsymbol{v}_n$ 将上式写为

$$\Pi_{xy}=\frac{\rho_n}{\rho_s T}q_x(v_{ny}-v_{sy}),$$

式中，q_x是从固体表面进入流体的热通量；在固体表面上，该热通量是连续的.

当固体表面与流体之间没有传热时，$\boldsymbol{v}_n$ 垂直于固体表面的分量也为零. 边界条件 $j_x=0$ 和 $\boldsymbol{v}_n=0$（其中 x 轴垂直于固体表面）等价于 $v_{sx}=0$ 和 $\boldsymbol{v}_n=0$. 因此，在这种情形下，得出 $\boldsymbol{v}_s$ 服从理想流体中通常的边界条件，而 $\boldsymbol{v}_n$ 则服从粘性流体的边界条件.

最后，来讨论这样一种氦 II 的运动，像通常在绕物体流动中所遇到的那样，它可以看成是不可压缩的. 同时，还要考虑到正常流动的粘性. 为此，必须在张量 Π_{ik} 上再加一项，照例，该项包含有粘性系数 η 以及速度 $\boldsymbol{v}_n$ 的空间导数：

$$\Pi_{ik}=p\delta_{ik}+\rho_s v_{si}v_{sk}+\rho_n v_{ni}v_{nk}-\eta\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k}+\frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i}\right). \quad (130.16)$$

对于不可压缩流体而言，不会出现第二粘性系数. 在所讨论的情形下，熵方程中的耗散项是高阶小量，因而可以忽略不计. 假定密度 ρ_n, ρ_s 和熵 s 都是常数，则从方程(130.5)可得 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}_n=0$, 从方程(130.3)可得$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$，所以有$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s=\nabla\cdot\boldsymbol{v}_n=0$. 利用这些方程，同时将式(130.16)代入方程(130.4)，于是得到如下方程：

$$\rho_s\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial t}+\rho_n\frac{\partial\boldsymbol{v}_n}{\partial t}+\rho_s(\boldsymbol{v}_s\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_s+\rho_n(\boldsymbol{v}_n\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_n$$
$$=-\nabla p+\eta\Delta\boldsymbol{v}_n. \quad (130.17)$$

方程(130.6)保持不变.

因超流体流动是势流，于是可以按式$\boldsymbol{v}_s=\nabla\phi_s$引进速度势$\phi_s$，又因

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_s=0,$$

所以，速度势应满足拉普拉斯方程

$$\Delta\phi_s=0. \tag{130.18}$$

在方程(130.17)中引进ϕ_s，并令$(\boldsymbol{v}_s\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_s=\nabla\left(\frac{1}{2}v_s^2\right)$，则得

$$\rho_n\frac{\partial\boldsymbol{v}_n}{\partial t}+\rho_n(\boldsymbol{v}_n\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_n+\rho_s\nabla\left(\frac{1}{2}v_s^2\right)+\rho_s\nabla\left(\frac{\partial\phi_s}{\partial t}\right)$$

$$=-\nabla p+\eta\Delta\boldsymbol{v}_n.$$

将正常流动和超流体流动的"压力"p_n，p_s用作辅助量：

$$p=p_0+p_n+p_s, \tag{130.19}$$

式中，p_0是无穷远处的压力，p_s由通常的理想流体公式确定：

$$p_s=-\rho_s\frac{\partial\phi_s}{\partial t}-\frac{1}{2}\rho_s v_s^2. \tag{130.20}$$

于是，速度$\boldsymbol{v}_n$的方程变为

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_n}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_n\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_n=-\frac{1}{\rho_n}\nabla p_n+\frac{\eta}{\rho_n}\Delta\boldsymbol{v}_n. \tag{130.21}$$

这个方程在形式上与密度为ρ_n，粘性系数为η（相应的运动粘性系数为η/ρ_n)的流体的纳维-斯托克斯方程完全相同。

因此，不可压缩氦 II 的流动问题化为两个普通的流体动力学问题：一个是关于理想流体的，另一个是关于粘性流体的．超流体流动像普通理想流体绕物体的势流一样，由拉普拉斯方程(130.18) 和法向导数$\partial\phi_s/\partial n$的边界条件确定．而正常流动则像普通粘性流体的流动那样，由纳维-斯托克斯方程(130.21)和固体表面上$\boldsymbol{v}_n=0$(在固体表面与流体之间没有热交换）的边界条件确定．然后，压力分布由公式(130.19)确定．

问　　题

问题 1. 设在充满氦 II 的毛细管两端之间保持一个很小的温度差ΔT. 试确定沿毛细管的热通量.

解: 根据公式(129.3),毛细管两端之间的压力降为

$$\Delta p = \rho s \Delta T.$$

由此将引起一正常流动,其平均速度(在整个毛细管截面上平均)为 $\bar{v}_n = R^2 \Delta p/8\eta l$($R$ 为毛细管的半径,l 为其长度,而 η 为正常流动的粘性系数,参看公式(17.10)). 其总的热通量为 $\rho s \bar{v}_n \pi R^2 = \pi R^4 \rho^2 s^2 \Delta T/8\eta l$. 在相反方向上产生一超流体流动,根据总传质为零的条件,得出其速度为

$$\bar{v}_s = -\frac{\rho_n \bar{v}_n}{\rho_s}.$$

问题 2. 在氦 II 作为不可压缩流体的情形下, 试导出其温度分布的公式:

解: 将 $v_s = \nabla \cdot \phi_s$ 代入方程(130.6)(其中 μ 由式(130.13)给出),然后积分之,则得

$$\mu(p,T) + \frac{1}{2}v_s^2 - \frac{1}{2}\frac{\rho_n}{\rho}(v_n - v_s)^2 + \frac{\partial \phi_s}{\partial t} = \text{常数}.$$

在不可压缩的流体中,温度和压力的改变很小,所以,如果取到一阶项,则有 $\mu - \mu_0 = -s(T - T_0) + (p - p_0)/\rho$,式中,$T_0$ 和 p_0 为无穷远处的温度和压力. 将这个表达式代入上述积分,并且用 p_n 和 p_s 来表示,最后得

$$T - T_0 = \frac{\rho_n}{\rho_s}\left[\frac{p_n}{\rho_n} - \frac{p_s}{\rho_s} - \frac{1}{2}(v_n - v_s)^2\right].$$

§131. 超流体中声波的传播

现在应用氦 II 的流体动力学方程组来讨论氦 II 中声波的传播. 照例,假设声波中的速度是很小的,而密度、压力和熵几乎等于它们各自固定的平衡值. 于是,略去方程(130.11),(130.13)和(130.14)中速度的二次项, 同时把方程(130.5)中$\nabla \cdot (\rho s v_n)$项的熵 ρs 看作常量(因为该项已经包含了小量 v_n), 就可以将方程线性化. 因此,流体动力学方程组变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0, \tag{131.1}$$

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t}+\rho s\nabla\cdot\boldsymbol{v}_n=0, \tag{131.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t}+\nabla p=0, \tag{131.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t}+\nabla\mu=0. \tag{131.4}$$

将方程(131.1)对时间微分，然后把方程(131.3)代入，即得

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}=\Delta p. \tag{131.5}$$

根据热力学恒等式 $d\mu=-sdT+dp/\rho$，则有 $\nabla p=\rho s\nabla T+\rho\nabla\mu$。将方程(131.3)的 ∇p 以及方程(131.4)的 $\nabla\mu$ 代入上式，则得

$$\rho_n\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)+\rho s\nabla T=0.$$

对上式取散度，并根据下列方程:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}-\frac{s}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}\\&=-s(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_n)+\frac{s}{\rho}(\nabla\cdot\boldsymbol{j})\\&=\frac{s\rho_s}{\rho}[\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_s-\boldsymbol{v}_n)],\end{aligned}$$

用 $(\rho/s\rho_s)\partial s/\partial t$ 来代替 $\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_s)$，最后得

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=\frac{\rho_s s^2}{\rho_n}\nabla T. \tag{131.6}$$

方程(131.5)和(131.6)确定了超流体中声波的传播．因为存在着两个方程，可见有两个声波的传播速度．

将 s,p,ρ 和 T 写为

$$s=s_0+s',\qquad p=p_0+p' \text{ 等等}$$

其中带撇号的字母表示相应的量在声波中的微小改变，而带下标

“0”的字母(为了简短起见，以后将略去下标“0”)为这些量固定的平衡值．因此，可以写出

$$\rho' = \frac{\partial\rho}{\partial p}p' + \frac{\partial\rho}{\partial T}T',$$

$$s' = \frac{\partial s}{\partial p}p' + \frac{\partial s}{\partial T}T',$$

因而方程(131.5)和(131.6)化为

$$\frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' + \frac{\partial\rho}{\partial T}\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial p}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial s}{\partial T}\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{\rho_s s^2}{\rho_n}\Delta T' = 0.$$

我们来寻找这些方程的平面波形式的解，其中的 p' 和 T' 都正比于因子 $e^{-i\omega(t-x/u)}$ (这里用 u 表示声速)．两个方程的相容性条件为

$$u^4\frac{\partial(s,\ \rho)}{\partial(T,\ p)} - u^2\left(\frac{\partial s}{\partial T} + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n}\frac{\partial\rho}{\partial p}\right) + \frac{\rho_s s^2}{\rho_n} = 0,$$

式中，$\partial(s,\rho)/\partial(T,p)$ 表示从 s，ρ 变换到 T，p 的雅可比行列式．利用热力学关系式，经过简单的变换，上述方程可以化为

$$u^4 - u^2\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v}\right] + \frac{\rho_s T s^2}{\rho_n c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T = 0, \qquad (131.7)$$

其中 c_v 为每单位质量的比热．这个 u^2 的二次方程给出氦 II 中声波传播的两个速度．当 $\rho_s = 0$ 时，其中一个根为零，正如我们所预期的，这时只得到普通的声速 $u = \sqrt{(\partial p/\partial\rho)_s}$.

实际上，氦 II 的比热 c_p 和 c_v 几乎在所有温度下都相同(因为热膨胀系数很小)．于是，根据熟知的热力学公式，其等温压缩系数和绝热压缩系数也大致相等，即$(\partial p/\partial\rho)_T \approx (\partial p/\partial\rho)_s$．如用 c 表示 c_p 和 c_v 的共同值，并用 $\partial p/\partial\rho$ 表示$(\partial p/\partial\rho)_T$ 和$(\partial p/\partial\rho)_s$ 的共同值，则从方程(131.7)，可得到声速的表达式如下：

$$u_1 = \sqrt{(\partial p/\partial\rho)},\quad u_2 = \sqrt{(Ts^2\rho_s/c\rho_n)}. \qquad (131.8)$$

其中 u_1 几乎不变，而另一个 u_2 显著地依赖于温度，并随同 ρ_s 在 λ 点上趋于零①.

在极低的温度下，流体中所有的基本激发，几乎都是声子，量 ρ_n，c 和 s 之间有下述关系：

$$c=3s,\quad \rho_n=\frac{cT\rho}{3u_1^2},\ \rho_s\cong\rho.$$

将这些表达式代入关于 u_2 的公式(131.8)中，可求出

$$u_2=\frac{u_1}{\sqrt{3}}.$$

因此，当温度趋向于零时，速度 u_1 和 u_2 趋向于有限的极限，而且其比值趋向于 $\sqrt{3}$.

为了更清楚地阐明氦 II 中两种声波的物理性质，我们来讨论平面声波(E. 栗弗席兹，1944). 在这样的波中，速度 v_n，v_s 以及温度和压力的可变部分 T'，p' 互成比例. 引用比例系数如下：

$$v_n=av_s,\quad p'=bv_s,\quad T'=cv_s. \tag{131.9}$$

如利用方程(131.1)—(131.6)，并且取到所需要的精度，则经过简单的运算，就得出**第一声**的三个系数为

$$a_1=1+\frac{\beta\rho}{\rho_s s}\frac{u_1^2u_2^2}{(u_1^2-u_2^2)},\qquad b_1=\rho u_1,\qquad c_1=\frac{\beta Tu_1^3}{c(u_1^2-u_2^2)}, \tag{131.10}$$

而**第二声**的三个系数为

$$a_2=-\frac{\rho_s}{\rho_n}+\frac{\beta\rho}{\rho_n s}\frac{u_1^2u_2^2}{(u_1^2-u_2^2)},\ b_2=\frac{\beta\rho u_1^2u_2^3}{s(u_1^2-u_2^2)},\ c_2=-\frac{u_2}{s}. \tag{131.11}$$

式中，$\beta=-(1/\rho)\partial\rho/\partial T$，这是热膨胀系数；因为 β 很小，所以包含

---

① 关于氦 II 含有杂质的溶液中的声波传播问题，下列著作曾加以讨论：在小浓度的情形下，波麦兰丘克作过讨论，И. Я. Померанчук, ЖЭТФ, 19, 43, 1949；在任意浓度的情形下，可考看 И. М. Халатников, ЖЭТФ, 23, 265, 1952.

② 考看 *Statistical Physics*, §66, §67（中译本：Л. Д. 朗道，Е. М. 栗弗席兹著，《统计物理学》，杨训恺译，人民教育出版社，1979，§66，§67）.

β 的量远小于不包含 β 的量.

我们看到,在第一类声波中, $v_n \approx v_s$,即就一级近似而言,在这类波中,任何给定的体元中的流体是作为整体而振荡的,也就是说,正常流体部分和超流体部分一起运动. 这类波显然相当于普通流体中的普通声波.

但是在第二类声波中, $v_n \approx -\frac{\rho_s v_s}{\rho_n}$,即总的通量密度为 $\boldsymbol{j} = \rho_s v_s + \rho_n v_n \approx 0$. 因此,就一级近似而言,在第二声的波中,超流体部分和正常流体部分各自沿相反的方向运动,任何给定的体元中流体的质心保持静止,而且总的质量通量为零. 这类波显然是超流体所特有的.

这两类波之间,还有另一个重要的差别,这可以从公式(131.10)和(131.11)中看出来. 在普通类型的声波中,压力振荡的波幅相对来说较大,而温度振荡的波幅则较小. 而在第二声波中,温度振荡的相对波幅却远大于压力振荡的相对波幅. 在这个意义上,可以说第二声的波是无阻尼的温度波①.

在略去热膨胀的近似程度上,第二声的波是纯粹的温度振荡(其中 $\boldsymbol{j}=0$),而第一声的波则是纯粹的压力振荡(其中, $v_s = v_n$)因此,这两类波的运动方程是完全分开的;在方程(131.6)中令 $s' = c\frac{T'}{T}$,则得 $\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = u_2^2 \Delta T'$,同时,在方程(131.5)中令 $\rho' = p'\frac{\partial \rho}{\partial p}$,则得 $\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = u_1^2 \Delta p'$.

关于在氦 II 中如何激发声波的各种方法问题,E. M. 栗弗席兹已讨论过(1944). 我们发现(参看本节的问题),为了产生第二声波,通常激发声波的机械方法(固体振荡)是很不适用的,因为所

① 当然,它们与普通导热介质的阻尼温度波无关(§52).

激发的第二声的强度与普通声波的强度相比，可以忽略不计．但是，在氦 II 中还有其它可以激发声波的方法可用．利用温度周期性变化的固体发射声波，就是这样的方法；这时，所发射的第二声的强度远大于第一声的强度，这正是我们所期望的，原因在于上面所提到的温度振荡的特性有所不同．

问　　题

问题 1. 设一平面在垂直于自身的方向上振荡，试确定所发射的第一声与第二声之间的强度比．

解： 我们来求第一声和第二声的波中的速度 v_s（沿 x 轴，而 x 轴垂直于该平面），其形式分别为

$$v_{s1}=A_1\cos\omega\left(t-\frac{x}{u_1}\right),\quad v_{s2}=A_2\cos\omega\left(t-\frac{x}{u_2}\right).$$

在振荡平面的表面上，速度 v_s 和 v_n 必等于该平面的速度，这一速度记作 $v_0\cos\omega t$．由此得出方程

$$A_1+A_2=v_0,\quad a_1A_1+a_2A_2=v_0,$$

其中系数 a_1 和 a_2 由方程(131.10)和(131.11)确定．氦 II 声波中的（时间）平均能量密度为

$$\rho_s\overline{v_s^2}+\rho_n\overline{v_n^2}=\frac{1}{2}A^2(\rho_s+\rho_na^2);$$

再乘以相应的声速 u，就得到能量通量（强度）．因此求出第二声和第一声的强度比为

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{A_2^2(\rho_s+\rho_na_2^2)u_2}{A_1^2(\rho_s+\rho_na_1^2)u_1}\approx\frac{\beta^2Tu_2^3}{cu_1}.$$

在这里，我们已假定 $u_2\ll u_1$，这个假定一直到很低的温度时仍然成立．所以这个比值总是很小的．

问题 2. 与问题 1 相同，但该平面的温度作周期性地变化．

解： 利用边界条件 $j=0$ 就足够了，这个条件在固定平面上一定成立．这个边界条件给出

$$\rho_s(A_1+A_2)+\rho_n(a_1A_1+a_2A_2)=0,$$

由此

$$\left|\frac{A_2}{A_1}\right|=\frac{\rho_n a_1+\rho_s}{\rho_n a_2+\rho_s}\approx\frac{s}{\beta u_2^2}.$$

然后可求出强度比为

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{c}{T\beta^2 u_1 u_2}.$$

这个强度比是很大的.

问题 3. 试确定一维大振幅第二声的行波中波型上各点的速度，并确定波中由于波型变形所产生的间断的传播速度(И. М. 哈拉特尼科夫，1952).

解: 在一维行波中，所有的量(ρ, p, T, v_s, v_n)都可以表示成一个参数的函数，这个参数可以是这些量中的一个(参看§94). 波型上各点的速度U等于导数 dx/dt,这个导数在所给定的参数值上取值. 每个量的空间导数和时间导数之间，有关系式 $\partial/\partial t=-U\partial/\partial x$. 各个量对该参数的导数将用加撇来表示.

我们不直接用v_s和v_n，而采用新的变量 $v=j/\rho$ 和 $w=v_n-v_s$，这样更为方便，同时选取坐标系使得所讨论的点上的速度为零. 方程(130.3)—(130.6)连同确定Π_{ik}, μ, ρ, s的公式(130.11)，(130.13)—(130.15)，可导出以下的方程:

$$-U\frac{\partial\rho}{\partial p}p'-U\rho^2\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)ww'+\rho v'=0, \tag{1}$$

$$p'+2\frac{\rho_s\rho_n}{\rho}ww'-U\rho v'=0, \tag{2}$$

$$\left[-\rho U\frac{\partial_s}{\partial T}+w\frac{\partial(s\rho_s)}{\partial T}\right]T'+sw\frac{\partial\rho_s}{\partial p}p'+\left[\rho_s s-Uw\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right]w'=0, \tag{3}$$

$$\left[-\rho s+Uw\frac{\partial\rho_n}{\partial T}\right]T'+\left[1+Uwp\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\rho_n}{\rho}\right)\right]p'$$
$$+\left[\rho_n U-\frac{\rho_n\rho_s}{\rho}w\right]w'-[U\rho+w\rho_n]v'=0. \tag{4}$$

在上述方程中，所有二阶小量以上的项都已略去，同时，所有包含热膨胀系数的项也已略去.

在第二声的波中，p和v的相对振幅远小于T和w的相对振幅，所以还可将wp'和wv'的项略去. 为了确定U，利用方程(3)以及方程(2)和(4)之差就足够了；所得到的关于T'和w'的两个线性方程，其相容性条件给出了下面的二次方程:

$$\rho_n U^2 \frac{\partial s}{\partial T} - Uw\left[\frac{4\rho_s\rho_n}{\rho}\frac{\partial s}{\partial T} - 2s\frac{\partial \rho_n}{\partial T}\right] - \rho_s s^2 = 0,$$

由此得出

$$U = u_2 + w\left(\frac{2\rho_s}{\rho} - \frac{sT}{\rho_n c}\frac{\partial \rho_n}{\partial T}\right).$$

这里，u_2 是第二声的当地声速，在整个波型上，u_2 随温度偏离其平衡值 δT 一起变化．将 u_2 按 δT 的幂展开，则得

$$u_2 = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T}\delta T = u_{20} + \frac{\partial u_2}{\partial T}\frac{\rho_n u_2}{\rho s}w,$$

式中，u_{20} 为 u_2 的平衡值．最后得

$$U = u_{20} + w\frac{\rho_s sT}{\rho c}\frac{\partial}{\partial T}\left(\ln\frac{u_{20}^3 c}{T}\right). \tag{5}$$

当波型有足够大的改变时，波中就会出现间断(在这种情形下，出现的是温度间断)；参看§94，§95．间断的传播速度为间断两侧的速度 U 之和的一半，即等于

$$c_{20} + \frac{w_1 + w_2}{2}\frac{\rho_s sT}{\rho c}\frac{\partial}{\partial T}\left(\ln\frac{u_{20}^3 c}{T}\right),$$

式中，w_1，w_2 为间断两侧 w 的值．

式(5)中 w 的系数既可以是正的，也可以是负的．这相当于：w 值较大的点既可以在 w 值较小的点的前面，也可以在其后面，而其间断既可以在波的前阵面上形成，也可以在其后阵面上形成(与此不同，在普通的声波中，激波总是出现在声波的前阵面上)．

第十七章　流体动力学中的涨落

§ 132. 流体动力学中涨落的一般理论

对静止流体中每一点的密度、温度、速度等均方根涨落的计算毋须进行专门讨论：这些量的涨落（在经典的即非量子的情况下）是由普通热力学公式确定的，这些公式对处于热平衡状态的任何介质的涨落都是正确的①.

但流体动力学特有的问题，是这些量涨落的时间关联问题，因而是运动流体中的涨落问题. 这些问题的解决，必须考虑流体中的耗散过程（粘性和导热）.

流体动力学中涨落的一般理论的建立，归结为要给出这些涨落量的“运动方程”. 这可以在流体动力学的一般方程中引进适当的附加项来解决.

流体动力学方程的下列形式：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0, \tag{132.1}$$

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \tag{132.2}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla s\right)=\frac{1}{2}\sigma'_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)-\nabla\cdot\boldsymbol{q}, \tag{132.3}$$

只不过是表达了运动流体中质量、动量和能量的守恒，而没有说明

① 参看 *Statistical Physics*, Pergamon Press, London, 1958, §111（中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹著，《统计物理学》，杨训恺等译，人民教育出版社，1979，§111.（引用该书章节公式时以SP作前冠。）

什么应力张量 σ'_{ik} 或热通量矢量 q 的具体形式. 所以,这种形式的方程对于任何运动,包括流体状态的涨落变化,都是成立的. 在有涨落的情况下,ρ, p, v 等应理解为流体的主运动中相应的量及其涨落量之和;当然,这个方程组总可以对涨落量加以线化.

应力张量的一般表达式 (15.3) 和热通量的一般表达式 (49.1), 分别给出了这些量与速度梯度和温度梯度的关系. 但在有涨落的情况下, 流体中还存在自发的局部应力和自发的局部热通量,它们与速度梯度和温度梯度无关;我们用 s_{ik} 和 g 表示这两个量,并称为**随机量**①. 于是,可写出②

$$\left.\begin{aligned}\sigma'_{ik} &= \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}+s_{ik},\\ q &= -\kappa\nabla T+g.\end{aligned}\right\}\qquad(132.4)$$

现在的问题是要确定 s_{ik} 和 g 的某些性质, 也就是要确定它们的均方值以及每个时刻流体中各点上它们的值之间的关联式. 这可利用涨落理论的一般公式来进行. 为简单起见, 我们将讲一讲流体力学中通常出现的非量子化的涨落情形的分析③, 并假设粘性系数和导热系数与涨落频率无关,即不呈现频散现象.

在涨落的一般理论中(SP § 110, § 121), 已讨论了涨落量 x_1, x_2, …的离散系列,而在这里,我们所讨论的是连续系列(流体中每一点 ρ, p, v 的值). 我们将用一种纯粹形式上的方法, 来避免这个无关紧要的困难,即把流体体积分成有限个很小的部分 ΔV, 并在每一部分取各个量的某平均值;在最后的公式中,让每一部分都趋于无限小.

我们把公式 (132.4) 当作是一般理论的方程组 (参看 SP

---

① 与涨落的一般理论中**随机力**一词相对应.

② 本章中,T 应理解为按能量单位计量的温度,即省略了玻耳兹曼常数.

③ 这表示假定涨落中出现的频率 ω 满足 $\hbar\omega \ll T$, 参看SP (109.2).

(121.9))

$$\dot{x}_a = -\sum_b \gamma_{ab} X_b + y_a, \qquad (132.5)$$

量 $\dot{x}_a$ 为每一部分 ΔV 中张量 σ'_{ik} 和矢量 $\mathbf{q}$ 的分量:

$$\dot{x}_a \longrightarrow \sigma'_{ik}, q_i. \qquad (132.6)$$

因而随机量 s_{ik} 和 $\mathbf{g}$ 就是相应的量 y_a:

$$y_a \longrightarrow s_{ik}, g_i. \qquad (132.7)$$

按照一般规则,利用流体中总熵 S 变化率的公式,可以看出 x_a 的意义. 像 § 49 中那样,由方程(132.3),得

$$\dot{S} = \int \left[\frac{\sigma'_{ik}}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} \right] dV$$

(若 $s_{ik}=0, \mathbf{g}=0$, 则此式给出(49.6));或用所有部分 ΔV 的和代替这个积分,得

$$\dot{S} = \Sigma \left[\frac{\sigma'_{ik}}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2} \right] \Delta V. \qquad (132.8)$$

同时,我们还应该有 $\dot{S} = -\Sigma X_a \dot{x}_a$; 参看(58.4). 将(132.6)代入此式,并与(132.8)进行比较,我们得到相应的诸量 X_a 为

$$X_a \to -\frac{1}{2T} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \Delta V, \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} \Delta V. \qquad (132.9)$$

现在容易求得系数 γ_{ab}, 由

$$\overline{y_a(t_1) y_b(t_2)} = (\gamma_{ab} + \gamma_{ba}) \delta(t_1 - t_2), \qquad (132.10)$$

立即可得出所要求的关联式;参看 SP(121.10 a). 这里的平均,应理解为通常统计意义上的平均,也就是对这些量在时刻 t_1 和 t_2 所有可能值的概率取平均;对于给定的差值 $t_1 - t_2$, 它也可写成对 t_1 或 t_2 取平均.

我们首先要指出,在公式(132.4)中,根本不包含有 σ'_{ik} 与温度梯度之间的关系或 $\mathbf{q}$ 与速度梯度之间的关系的项. 这就表明相应的系数 γ_{ab} 为零,因而由(132.10)得

$$\overline{s_{ik}(\boldsymbol{r}_1, t_1) g_l(\boldsymbol{r}_2, t_2)} = 0, \tag{132.11}$$

就是说，s_{ik} 和g_l 的值完全是互不相关的($\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 为流体中两点的坐标)。

其次，若 g_i 和 $\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_k}\Delta V$ 的值取自不同的体积 ΔV，则这两个量之间相关的系数为零；若取自同一体积，则系数为 $\kappa T^2\delta_{ik}/\Delta V$。于是有

$$\overline{g_i(\boldsymbol{r}_1, t_1) g_k(\boldsymbol{r}_2, t_2)} = 0, \text{如果 } \boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{r}_2,$$

$$\overline{g_i(\boldsymbol{r}, t_1) g_k(\boldsymbol{r}, t_2)} = \frac{2\kappa T^2}{\Delta V}\delta_{ik}\delta(t_1 - t_2).$$

现在取极限 $\Delta V \to 0$，显然可将这两个公式合并写为

$$\overline{g_i(\boldsymbol{r}_1, t_1) g_k(\boldsymbol{r}_2, t_2)} = 2\kappa T^2\delta_{ik}\delta(t_1 - t_2)\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2). \tag{132.12}$$

最后，类似地，我们可以求得随机应力张量分量之间的相关公式为

$$\overline{s_{ik}(\boldsymbol{r}_1, t_1) s_{lm}(\boldsymbol{r}_2, t_2)}$$

$$= 2T\left[\eta(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\delta_{ik}\delta_{lm}\right]\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

$$\delta(t_1 - t_2). \tag{132.13}$$

公式(132.11)—(132.13)给出了该问题的解(Л. Д. 朗道，E. M. 栗弗席兹，1957)①。

这些公式可以改写为用有关量的傅里叶时间分量来表示。涨落量 $x_a(t)$ 的傅里叶分量定义为

$$x_{a\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{i\omega t} dt, \quad x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{a\omega} e^{-i\omega t} d\omega; \tag{132.14}$$

参看 SP § 118。对于这样定义的分量 $y_{a\omega}$ 和 $y_{b\omega}$，我们有

$$\overline{y_{a\omega} y_{b\omega'}} = \frac{1}{2\pi}(\gamma_{ab} + \gamma_{ba})\delta(\omega + \omega');$$

---

① 若要转换到普通的温度测量单位(度)，必须用 kT 替换 T，用 κ/k 替换 κ，这里 k 是玻耳兹曼常数。

参看SP (121.10). 于是,用$\frac{1}{2\pi}\delta(\omega+\omega')$代替$\delta(t_1-t_2)$,我们得到的是下列三个方程,而不是前面的(132.11)—(132.13).

$$\overline{s_{ik\omega}(\boldsymbol{r}_1)g_{l\omega'}(\boldsymbol{r}_2)}=0, \tag{132.15}$$

$$\overline{g_{i\omega}(\boldsymbol{r}_1)g_{k\omega'}(\boldsymbol{r}_2)}=\frac{\kappa T^2}{\pi}\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\delta(\omega+\omega'), \tag{132.16}$$

$$\overline{s_{ik}\omega(\boldsymbol{r}_1)s_{lm\omega'}(\boldsymbol{r}_2)}$$
$$=\frac{T}{\pi}\left[\eta(\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl})+\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)\delta_{ik}\delta_{lm}\right]$$
$$\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\delta(\omega+\omega'). \tag{132.17}$$

为了将这些公式推广到量子化涨落的情形,只须在公式(132.15)—(132.17)的右边包含一个因子$(\hbar\omega/2T)\mathrm{cth}(\hbar\omega/2T)$;参看SP (124.21). 当粘性和导热呈现频散现象时,则η,ζ,κ为频率的复函数. 不难证明,如用函数$\eta(\omega),\zeta(\omega),\kappa(\omega)$的实部代替$\eta,\zeta,\kappa$,则公式(132.15)—(132.17)可作相应的推广.

§ 133. 无限介质中的涨落

上面求得的公式原则上给出了任何具体情况下的涨落. 这个问题解法如下. 把s_{ik}和$\boldsymbol{g}$视为坐标和时间的已知函数,加上适当的流体力学边界条件,我们就可从形式上求解$\boldsymbol{v},\rho,\cdots$的方程(132.1)—(132.3). 由此,我们可得$\boldsymbol{v},\rho,\cdots$作为$s_{ik}$和$\boldsymbol{g}$的线性函数. 因此,任何作为$\boldsymbol{v},\rho,\cdots$的二次(或双线性)函数的量均可用$s_{ik}$和$\boldsymbol{g}$的二次函数表示,并且可由公式(132.11)—(132.13)计算其平均值;在最后的结果中不出现辅助量s_{ik}和$\boldsymbol{g}$.

作为刚才所述方法的一个说明,我们来研究静止的无限介质中的压力涨落,设此介质的第二粘性系数$\zeta(\omega)$很大,它呈现频散性;相比之下,假定普通粘性和导热的影响都可以略去(§78所述的条件下可能发生那种情况),

将所有的(已经对时间作傅里叶展开的)量展成空间的傅里叶积分，即可解出方程(132.1)—(132.3)；就任何量 $f(\boldsymbol{r})$ 而言，可令

$$f(\boldsymbol{r})=\int_{-\infty}^{\infty} f_{k}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})d\boldsymbol{k},\ d\boldsymbol{k}=dk_x dk_y dk_z, \qquad (133.1)$$

式中，

$$f_{\boldsymbol{k}}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int f(\boldsymbol{r})\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})dV. \qquad (133.2)$$

傅里叶分量的相关函数可立即由这些量本身的相关函数求得. 例如,若

$$\overline{f(\boldsymbol{r}_1)f(\boldsymbol{r}_2)}=A\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2), \qquad (133.3)$$

则

$$\begin{aligned}\overline{f_{\boldsymbol{k}}f_{\boldsymbol{k}'}}&=\frac{1}{(2\pi)^6}\iint\overline{f(\boldsymbol{r}_1)f(\boldsymbol{r}_2)}\exp[-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_2)]dV_1dV_2\\&=\frac{A}{(2\pi)^6}\iint\delta(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\exp[-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_2)]dV_1dV_2\\&=\frac{A}{(2\pi)^6}\int\exp[-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{r}]dV,\end{aligned}$$

或者最后写为

$$\overline{f_{\boldsymbol{k}}f_{\boldsymbol{k}'}}=\frac{A}{(2\pi)^3}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'). \qquad (133.4)$$

特别是,我们(在这种情况下)只保留公式(13.217)中的 ζ 项,就可得出代替该公式的表达式如下:

$$\overline{(s_{ik})_{\omega\boldsymbol{k}}(s_{lm})_{\omega'\boldsymbol{k}'}}=\frac{T}{8\pi^4}\mathrm{Re}\,\zeta(\omega)\cdot\delta(\omega+\omega')\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}'). \qquad (133.5)$$

在上述(热导率很小)的条件下，熵的变化对压力的变化的影响比较小;所以,压力涨落可当作是绝热的. 因此,可写出(132.1)的线化方程为

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\delta p}{\partial t}+\rho\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v}=0,$$

式中δp, $\delta\boldsymbol{v}$为压力和速度的涨落，ρ为平衡密度，而c_0为由平衡状态方程算出的声速(§78). 取时间和空间的傅里叶分量，便有

$$-\frac{\omega}{c_0^2}\delta p_{\omega\boldsymbol{k}}+\rho\boldsymbol{k}\cdot\delta\boldsymbol{v}_{\omega\boldsymbol{k}}=0. \qquad (133.6)$$

类似地，方程(132.2)变为

$$-\omega\rho(\delta v_i)_{\omega\boldsymbol{k}}=-k_i\delta p_{\omega\boldsymbol{k}}+i\zeta(\omega)k_i\boldsymbol{k}\cdot\delta\boldsymbol{v}_{\omega\boldsymbol{k}}+k_k s_{ik}, \qquad (133.7)$$

式中，$\zeta(\omega)$可由比如公式(78.6)加以定义.

为了求得$\delta p_{\omega\boldsymbol{k}}$，我们用$\boldsymbol{k}$点乘方程(133.7):

$$-\omega\rho\boldsymbol{k}\cdot\delta\boldsymbol{v}_{\omega\boldsymbol{k}}=-k^2\delta p_{\omega\boldsymbol{k}}+i\zeta k^2(\boldsymbol{k}\cdot\delta\boldsymbol{v}_{\omega\boldsymbol{k}})+k_ik_ks_{ik},$$

并用(133.6)消去$\boldsymbol{k}\cdot\delta\boldsymbol{v}_{\omega\boldsymbol{k}}$. 其结果为

$$\delta p_{\omega\boldsymbol{k}}=\frac{k_ik_ks_{ik}}{k^2-\dfrac{\omega^2}{c_0^2}-i\zeta k^2\dfrac{\omega}{\rho c_0^2}}.$$

最后，作乘积$\delta p_{\omega\boldsymbol{k}}\delta p_{\omega'\boldsymbol{k}'}$，并借助于公式(133.6)取平均，得

$$\overline{\delta p_{\omega\boldsymbol{k}}\delta p_{\omega'\boldsymbol{k}'}}=\frac{Tc_0^4}{8\pi^4}\cdot\frac{\operatorname{Re}\zeta(\omega)\cdot\delta(\omega+\omega')\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')}{\left[c_0^2-\dfrac{\omega^2}{k^2}-i\omega\dfrac{\zeta}{\rho}\right]\left[c_0^2-\dfrac{\omega^2}{k^2}+i\omega\dfrac{\zeta^*}{\rho}\right]}. \qquad (133.8)$$

例如，若用(78.6)替换上式中的$\zeta(\omega)$，我们得

$$\overline{\delta p_{\omega\boldsymbol{k}}\delta p_{\omega'\boldsymbol{k}'}}=\frac{\pi}{8\pi^4}\frac{\tau\rho c_0^4(c_\infty^2-c_0^2)\delta(\omega+\omega')\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')}{\left(c_0^2-\dfrac{\omega^2}{k^2}\right)^2+\omega^2\tau^2\left(c_\infty^2-\dfrac{\omega^2}{k^2}\right)^2}. \qquad (133.9)$$

末了，我们来说明怎样由(133.8)导出流体中给定点上压力涨落均方值的常用的(经典的)公式. 为了简化计算，我们假设ζ与ω无关①.

① 实际上，该(经典的)结果与函数$\zeta(\omega)$的形式无关；在推导过程中用到的该函数的那些性质，只不过是在任何情况下都应有的性质(参看SP§122).

按照公式(132.14)和(133.2)从傅里叶表达式转回到函数 $\delta p(\boldsymbol{r}_1, t_1)$, $\delta p(\boldsymbol{r}_2, t_2)$本身，并取 $t_1=t_2\equiv t$，我们可写出

$$\overline{\delta p(\boldsymbol{r}_1, t)\delta p(\boldsymbol{r}_2, t)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\delta p_{\omega\boldsymbol{k}}\delta p_{\omega'\boldsymbol{k}'}}$$

$$\times\exp[-i(\omega+\omega')t]\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_2]d\omega d\omega' d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k}'.$$

这里，必须将(133.8)代入. 由于被积函数中含有因子 $\delta(\omega+\omega')$，所以，对整个频率范围积分后，所得到的结果只是在被积函数中用零代替 $\omega+\omega'$. 第二积分给出①

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_0^2\dfrac{\zeta}{\rho}d\omega}{\left(c_0^2-\dfrac{\omega^2}{k^2}-i\zeta\dfrac{\omega}{\rho}\right)\left(c_0^2-\dfrac{\omega^2}{k^2}+i\zeta\dfrac{\omega}{\rho}\right)}=\pi.$$

于是，

$$\overline{\delta p(\boldsymbol{r}_1, t)\delta p(\boldsymbol{r}_2, t)}=\frac{T\rho c_0^2}{(2\pi)^3}\iint\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_2)]d\boldsymbol{k}d\boldsymbol{k}'$$

$$=\frac{T\rho c_0^2}{(2\pi)^3}\int\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)]d\boldsymbol{k}$$

$$=\rho Tc_0^2\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1). \tag{133.10}$$

这就是所要求的结果：在一个小体积 ΔV 上对(133.10)取平均，我们得

$$\overline{(\delta p)^2}=\frac{\rho Tc_0^2}{\Delta V},$$

它与热力学的公式一致，参看 SP(111.11).

---

① 例如，取积分路线为复变数 ω 平面中一个大的半圆，通过留数的计算，很容易算出这个积分.

中外人名对照表

三　画

马赫(Mach, E.)

四　画

开耳芬(Kelvin[Thomson, W.])
巴俾涅(Babinet, A.)
戈利德别尔格(Гольдберг, З. А.)
贝塞耳(Bessel, F. W.)
牛　顿(Newton, I.)

五　画

布里克莱(Bleakney, W.)
布洛欣采夫(Блохинцев, Д. И.)
布朗(Brown, R.)
布塞曼(Busemann, A.)
布列霍夫斯基(Бреховский, Л.)
卡门(Karman, T. von)
卡丹(Cardan, J.)
卡尔包维奇(Карпович, Е. А.)
卡皮查(Капица, П, Л.)
卡拉弗里(Carafoli, E.)
包密兰丘克(Померанчук, И. Я.)
尼科里斯基(Никольский. А. А.)
皮克莱(Peclat, J. C. E.)
皮利乌(PellewA.)
兰金(Rankine, W. J. M.)
艾瓦佐夫(Айвазов, Б. В.)
兰姆(Lamb, H.)
汉克尔(Hankel, H.)
弗兰克-卡缅涅茨基(Д. А. Франк-Каменецкий)
弗里德里希(Friedrichs, K. O.)
弗劳德(Froude, W.)
弗兰克尔(Франкль, Ф. И.)
弗拉里(Ferrari, C.)

六　画

亚里(Airy, G. B.)
托尔明(Tollmien, W.)
达朗伯(D'Alembert, J. B.)
列昂托维奇(Леонтович, М. А.)
列维奇(Левич, В. Г.)
迈耶(Meyer, T.)
伊兹麦洛夫(Измайлов, С. В.)
多普勒(Doppler, C.)
米尔里奥希科夫(Миллионщиков, М. Д.)
米海里森(Михельсон, В. А.)
许瓦兹(Schwarz, K. H.)
伊萨科维奇(Исакович, М. А.)

七 画

八 画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

索　　引

（罗马数字和阿拉伯数字分别表示章、节号；T、W、Z分别表示图、问题和注解）

一　　划

二　　划

三　　划

四　　划

五　　划

六　　划

七 划

八　划

九　　划

十 划

十 一 划

十 二 划

十　三　划

十 四 划

十 五 划

十 六 划

十 七 划

十 九 划

外文开头